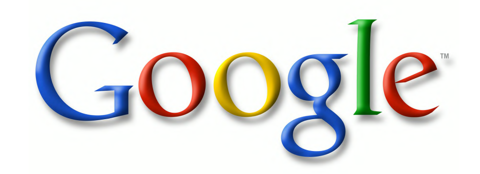


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

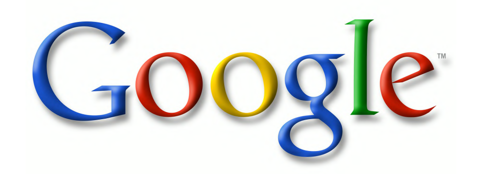
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

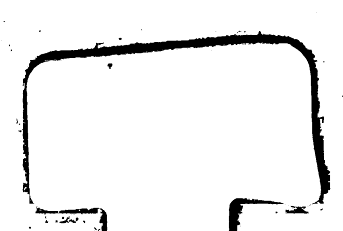
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



Engineering
TJ
182
.M61

Kinetik und Kinetostatik des Schubkurbelgetriebes.

Von der Technischen Hochschule

FRIDERICIANA ZU KARLSRUHE

zur Erlangung der Würde eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigte Dissertation

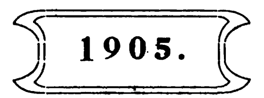
von

Hermann Meuth,

Diplomingenieur.

Referent: Hofrat Professor E. Brauer,

Korreferent: Professor R. Grassmann.



Die vorliegende Arbeit wurde im Oktober 1904 der Abteilung für Maschinenwesen an der Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe vorgelegt. Sie wurde mit der nachdrücklichsten Unterstützung von Seiten des Herrn Professors Dr. Heun und des Herrn Privatdozenten Dr. Hamel durchgeführt. Ich bin aus diesem Grunde den genannten Herren zu grossem Dank verpflichtet, den ich hier auch öffentlich zum Ausdruck bringe und ganz besonders für die ausserordentlich freundliche Weise, in der mir jederzeit Ratschläge und Hilfe erteilt wurden.

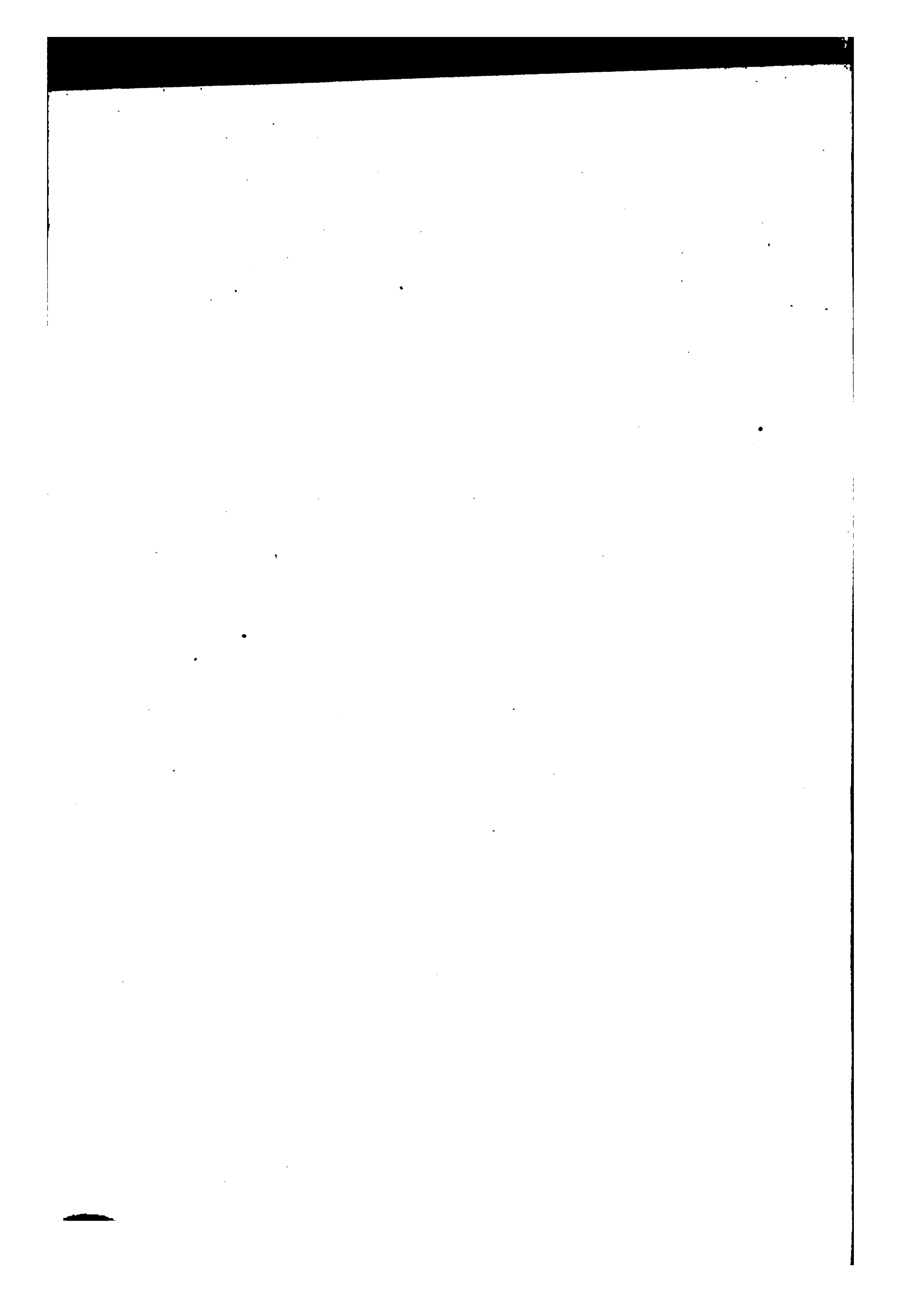


Seite

INHALT.

Release 11-29-40 mp 2
© 3-13-57 (E. D.)

159190



Einleitung.

Das Kurbelgetriebe hat in der technischen Literatur eine eingehende Behandlung erfahren. In einem Teil der Arbeiten über dasselbe kommt mehr die kinematische Seite, d. i. die Betrachtung der Geschwindigkeit und Beschleunigung der einzelnen Glieder des Getriebes nach dessen Konfiguration, zur Geltung, wie bei:

Kirsch: Ueber die graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung.[1])

Wittenberg: Bestimmung des Massendrucks.[2])

Land: Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan für Mechanismen, nebst Anwendung auf die kinematische und dynamische Wirkungsweise der Schubkurbel.[3])

Die Kinetik oder Dynamik des Kurbelgetriebes im strengen Sinne, d. i. die Betrachtung der Bewegung unter der Einwirkung aller äusseren Kräfte, behandelt eine Schrift von *Lorenz:* Die Dynamik der Kurbelgetriebe; Teubner, 1902. Der kinetostatische Teil derselben findet sich auch in der Z. d. V. d. I. 1897, S. 998. Hierher gehören auch die einschlägigen Kapitel in *Grashofs*: Theoretische Maschinenlehre, Bd. 2, S. 353, in *Weisbachs:* Ingenieur- und Maschinenmechanik, 3. Teil, 1. Abt., S. 744; ferner *Radingers*: Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit und *Hartmanns*: Dynamische Theorie der Dampfmaschine.[4])

---

[1]) Z. d. V. d. I. 1890, S. 1320.

[2]) Z. d. V. d. I. 1896, S. 580.

[3]) Z. d. V. d. I. 1896, S. 983.

[4]) Z. d. V. d. I. 1892, S. 1.

Die kinetostatische Seite, d. i. die Betrachtung der Reaktionen in den Lagern und Führungen des Getriebes sowie der Spannungen im Gestänge, welche unter dem Einfluss der gesamten Kräfte auftreten, kommt zum Teil in den Arbeiten von *Wehage:* Ueber den ruhigen Gang der Dampfmaschinen mit Kurbelwelle[5]) und von *Stribeck:* Die bei den Dampfmaschinen auftretenden Stösse an Kurbel- und Kreuzkopfzapfen[6]) zum Ausdruck. Die spezielle Betrachtung der Reaktionen, welche durch die Bewegungskräfte allein hervorgerufen werden, hat zu dem Problem des Massenausgleichs geführt, mit welchem sich hauptsächlich die Arbeiten von *Schlick*[7]), *Berling*[8]), *Lorenz*[9]) und *Schubert*[10]) beschäftigen.

In den angeführten Arbeiten ist neben dem analytischen Verfahren die graphische Darstellung in weitgehendem Masse in Anwendung gekommen, namentlich zur Bestimmung der kinematischen und kinetostatischen Grössen. Der graphischen Ermittlung der Bewegung des Getriebes aus den gegebenen äusseren Kräften und Massen stellen sich einige Schwierigkeiten entgegen, denen man durch die Einführung konstanter, reduzierter Massen entgeht. Eine neuere Arbeit auf diesem Gebiete, Graphische Dynamik von *Wittenbauer,*[11]) hebt den wesentlichen Punkt dabei besonders hervor, nämlich die Notwendigkeit, eine veränderliche reduzierte Masse für solche Teile einzuführen, welche keine rein rotierende oder oszillierende Bewegung haben. Neben dieser Arbeit gibt eine Abhandlung von *Koob*: Das Regulierproblem in vorwiegend graphischer Behandlung[12]) eine schöne Anwendung graphischer Methoden auf dynamische Probleme.

Bei der Mehrzahl dieser Arbeiten ist für die Bestimmung der rein kinematischen Beziehungen und der Massenkräfte des Getriebes eine konstante Winkelgeschwindigkeit im Kurbelkreis vorausgesetzt. Wenn es sich um die Er-

---

[5]) Z. d. V. d. I. 1884, S. 637.
[6]) Z. d. V. d. I. 1893, S. 10.
[7]) Z. d. V. d. I. 1894, S. 1091.
[8]) Z. d. V. d. I. 1899, S. 981.
[9]) Z. d. V. d. I. 1897, S. 353.
[10]) *Schubert,* Zur Theorie des *Schlick*schen Problems.
[11]) Z, f. Mathem. u. Phys. 1904.
[12]) Z. d. V. d. I. 1904, S. 296.

mittlung des Schwungrades handelt, dessen Grösse von einer vorgeschriebenen Geschwindigkeitsschwankung abhängig ist, muss diese Voraussetzung natürlich wieder fallen gelassen werden. Indessen abgesehen davon, dass es auch in dem erstgenannten Falle unter Umständen nicht angängig ist, die Veränderlichkeit der Winkelgeschwindigkeit zu vernachlässigen, erledigen sich die Rechnungen mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit ebenso einfach und übersichtlich und dabei gerät der dynamische Charakter des Problems nicht in Gefahr, verwischt zu werden.

Es mag gleich hier auf die Verschiedenheit in der Behandlung mechanischer Probleme hingewiesen werden.

Die Eigentümlichkeit der Behandlung in der technischen Mechanik geht schon aus dem Vorstehenden hervor. In fast jedem einzelnen Falle ist der eingeschlagene Weg ein individueller und selbständiger. Je nach Bedürfnis wird das zuerst für einen bestimmten Zweck in Angriff genommene Problem weiter ausgebaut, werden früher gemachte Einschränkungen fallen gelassen und neue Voraussetzungen gemacht.

Dem gegenüber steht die systematische Mechanik. Es ist bemerkenswert, dass die Prinzipien derselben zur Lösung technischer Aufgaben zwar vollkommen entwickelt waren, hier und da auch Ansätze und vollständige Lösungen technischer Probleme sich fanden, wie z. B. von der Bewegung des Kurbelmechanismus, des Regulators, aber in der Technik fast nicht benutzt wurden, weil eben keine zwingende Notwendigkeit einer eingehenden Untersuchung vorlag oder weil man, als diese später eintrat, lieber zum Ausbau der selbständig ausgebildeten technischen Methoden schritt — und dadurch auch manche tiefe Einsicht in die mechanischen Verhältnisse gewann — als zur Benutzung der fernerliegenden systematischen Mechanik.

In letzterer werden zwei Wege eingeschlagen. Den einen könnte man als den synthetischen bezeichnen: zur Bestimmung der Bewegung eines Systems wird dieses in seine einzelnen starren Elemente zerlegt und auf letztere dann die Gesetze für den starren Körper angewendet. Man benutzt hierbei meist das *d'Alembert*sche Prinzip oder das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft. Diese Methode hat den, besonders für die Einführung in die Mechanik wichtigen Vorzug, dass die mechanischen

Grössen, die bei der Bewegung des einzelnen starren Körpers auftreten, der Vorstellung leichter zugänglich sind als diejenigen Grössen, welche sich auf die Bewegung des ganzen Getriebes beziehen. Diese Richtung kommt auch in den meisten der oben angeführten Arbeiten über das Kurbelgetriebe zum Ausdruck.

Der andere Weg der systematischen Mechanik geht von der Betrachtung des ganzen Systemes aus und rührt von *Lagrange* her. Der Vorzug der *Lagrange*schen Methode tritt am stärksten bei Problemen mit mehreren Freiheitsgraden hervor. Der Ingenieur ist mit dieser Methode zur Zeit im allgemeinen noch wenig vertraut; indessen kann sie ihm bei schwierigeren kinetischen Problemen doch von Nutzen sein, ein Grund, der es berechtigt erscheinen lässt, die Anwendung der Methode an dem einfachen Beispiel des Kurbelgetriebes,[13]) das ein System von nur *einem* Freiheitsgrad darstellt, zu zeigen und durch die mannigfachen Anknüpfungspunkte an die dem Techniker geläufigen Beziehungen denselben damit bekannt zu machen.

Die Gliederung der zu behandelnden Aufgabe, der Untersuchung des Schubkurbelgetriebes, erfolgt nach den schon eingangs bezeichneten Richtungen in einen kinetischen oder dynamischen Teil und in einen kinetostatischen Teil.

---

[13]) s. auch die Darstellung von *Heun* in dessen Referat: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Teubner, 1900.

A. Kinetischer Teil.

Es handelt sich hier um die Beschreibung des Bewegungsverlaufes im Kurbelgetriebe unter der Einwirkung aller Kräfte, analytisch ausgedrückt um die Aufstellung der Bewegungsgleichung, d. i. der Darstellung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsprozesses in Abhängigkeit von einer Grundvariabeln — vom Kurbelwinkel oder vom Kolbenweg —, auf welche die Bewegung des Getriebes bezogen wird.

Wie schon eingangs angedeutet, verfährt die synthetische Methode zur Lösung dieser Aufgabe folgendermassen: sie zerlegt den Mechanismus in seine Einzelglieder und wendet auf dieselben die Mechanik des starren Körpers an, wobei die an den Schnittstellen (Gelenken) auftretenden Reaktionen als Ersatzkräfte angebracht werden. Die Gleichgewichtsbedingung zwischen diesen Reaktionskräften, den äusseren Kräften und den Trägheitskräften, welche an einem Gliede angreifen, ergibt alsdann die Bewegungsgleichung.

Lagrange hat auf andere Weise einen Ausdruck für die Bewegung eines beliebigen, aus starren Gliedern bestehenden Systems aufgestellt, von der Erkenntnis ausgehend, dass der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsprozess eines beliebigen Systems nur durch die Grösse, Form und durch den Verlauf der *lebendigen Kraft* oder *kinetischen Energie* bestimmt ist. Die Schwankungen der kinetischen Energie sind nun lediglich eine Folge der Arbeitsleistung der äusseren Kräfte; die in den Lagern und Führungen auftretenden Reaktionen leisten keine Arbeit, kommen daher für die kinetische Energie nicht in Betracht. Mit anderen Worten: der Beschleunigungsprozess eines beliebigen Systems verläuft ohne Rücksicht auf die in den Bewegungsbahnen der einzelnen Glieder auftretenden Reaktionen lediglich bedingt durch die Konstitution, Bewegungsfähigkeit, Massenverteilung des Systems und durch die treibenden Kräfte.

Für den allgemeinsten Fall der Bewegung eines beliebigen Systems von n - Freiheitsgraden haben die *Lagrange*schen *Bewegungsgleichungen* die Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dq_n}{dt}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n, \text{[14]} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

worin L die lebendige Kraft oder kinetische Energie des ganzen bewegten Systems und q_n die Variabeln bedeuten, auf welche die Bewegung bezogen wird, die sogen. Koordinaten des Systems. Wenn es sich um eine Drehung handelt, ist q_n ein Winkel, im Falle einer Verschiebung eine Strecke. $\frac{dq_n}{dt}$ ist die Koordinatengeschwindigkeit. Das Glied auf der rechten Seite stellt im Falle einer Verschiebung die Summe der äusseren Kräfte, im Falle einer Drehung deren Momente in bezug auf den Drehpunkt dar. Allgemein ist Q_n dadurch bestimmt, dass $\sum_1^n Q_n\, \delta q_n$ gleich der Arbeit der treibenden Kräfte bei einer willkürlichen virtuellen, d. h. bloss gedachten, unendlich kleinen Verschiebung δq_n des Systems ist. Es ist schon oben darauf hingewiesen worden, dass unter den äusseren Kräften nur die treibenden Kräfte mit Ausschluss der Reaktionen und der aus der Bewegung entstehenden Kräfte[15]) zu verstehen sind. Hierin liegt der wesentlichste Unterschied zwischen der *Lagrange*schen Methode und dem synthetischen Verfahren.

Eine Interpretation der *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen mit Hilfe der üblichen Vorstellungen und Begriffe der technischen Mechanik ist wegen der Allgemeinheit der Koordinaten q nur mit Einschränkungen befriedigend gelungen. Betrachten wir zunächst die Bewegung eines starren Körpers in der Ebene! Wirken auf den Körper äussere Kräfte, so ist nach dem Flächensatze die

---

[14]) s. *Föppls* Dynamik (Vorlesungen über Technische Mechanik 4. Bd. S. 285).

[15]) Zu den Kräften, welche aus der Bewegung entstehen, sind eigentlich auch die Reibungskräfte zu rechnen: es sollen darunter aber nur die sogen. Massenkräfte verstanden werden, während der Reibungswiderstand zu den äusseren Kräften gerechnet wird.

zeitliche Aenderung des statischen Momentes der Bewegungsgrösse (d. i. in diesem Falle das erste Glied auf der linken Seite der *Lagrange*schen Gleichung) gleich der Summe der statischen Momente aller äusseren Kräfte in bezug auf jeden beliebigen Momentenpunkt, also gleich der Grösse Q auf der rechten Seite. Für diesen Fall des starren Körpers verschwindet das zweite Glied $-\frac{\partial L}{\partial q}$ aus der Gleichung, da schon das erste Glied gleich Q ist.[16]) Das Glied $-\frac{\partial L}{\partial q}$ kann daher als eine der Bewegung eines *Systems* von starren Gliedern eigentümliche Grösse gedeutet werden.

Von welcher Art dieses zweite Glied $\frac{\partial L}{\partial q}$ im besonderen Falle ist, erkennt man z. B. bei der Betrachtung eines zwangläufigen Systems von Gliedern mit den Massen M_1, M_2 usw. Der Schwerpunkt von M_1 führe eine Drehung um einen festen Punkt aus mit der Winkelgegeschwindigkeit $\frac{dq}{dt}$, die übrigen Massen seien alle auf den Schwerpunkt von M_1 reduziert $= \mathbf{M}$ und daher mit dem Drehwinkel q veränderlich. Die lebendige Kraft des Systems ist alsdann

$$L = \frac{1}{2}(M_1 + \mathbf{M})\left(r\frac{dq}{dt}\right)^2;$$

führt man diesen Wert in die *Lagrange*sche Gleichung ein, so erhält man aus dem 1. Glied

$$\frac{d}{dt}(M_1 + \mathbf{M})\, r^2 \frac{dq}{dt} = (M_1 + \mathbf{M})\, r^2 \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{d}{dt}\mathbf{M}\left(r^2 \frac{dq}{dt}\right)$$

aus dem 2. Glied

$$-\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q}\left(r\frac{dq}{dt}\right)^2.$$

---

[16]) Eigentlich deshalb, weil q in L in diesem Falle nicht vorkommt.

Berücksichtigt man, dass $\mathbf{M}$ von q abhängig ist, so kann im 1. Glied für $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ gesetzt werden $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q \frac{dt}{dq}}$, wodurch der zweite Ausdruck im 1. Glied bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ mit dem 2. Gliede identisch wird.

Jetzt wird es auch in diesem besonderen Falle deutlich, welche begriffliche Bedeutung dem 2. Gliede $\frac{\partial L}{\partial q}$ zukommt. Setzt man nämlich die Koordinatengeschwindigkeit, welche in diesem Falle zugleich auch die Geschwindigkeit des Systems ist, $\frac{dq}{dt} = \text{const.}$, so ändert sich trotzdem die kinetische Energie, weil sich $\mathbf{M}$ mit q ändert; es verschwindet nur der erste Ausdruck im 1. Gliede mit $\frac{d^2 q}{d\,t^2}$, welcher sonach denjenigen Teil des von aussen aufzuwendenden Momentes darstellt, welcher zur Aenderung der Systemgeschwindigkeit, also zur Aenderung der lebendigen Kraft des Systems, soweit sie in der Hauptsache von der Systemgeschwindigkeit abhängt, notwendig ist. Die übrig bleibenden Glieder geben dann denjenigen Teil des äusseren Momentes an, welcher zur Aenderung der lebendigen Kraft des Systems nach seinem inneren geometrischen Zusammenhang, zur Aenderung der Bewegung der einzelnen Glieder, welche dieselben nach kinematischen Forderungen ausführen, also gewissermassen zur *inneren* Aenderung der lebendigen Kraft des Systems aufgewendet werden muss.

Im vorstehenden sind die Verhältnisse beim Kurbelgetriebe schon im allgemeinen charakterisiert. Wir werden speziell in den zuletzt genannten Gliedern nach den später folgenden Entwicklungen den bekannten Ausdruck für das Massendruckdrehmoment der bewegten Getriebeteile erkennen.

Dass in der *Lagrange*schen Bewegungsgleichung gerade die Differenz zweier Anteile des äusseren Momentes auftritt, ist in dem vorliegenden speziellen Falle einfach dadurch zu erklären, dass der zur inneren Aenderung der

lebendigen Kraft aufzuwendende Anteil des äusseren Momentes im 1. Gliede mit seinem doppelten Betrag

$$\mathsf{M}\, r^2 \left(\frac{d\, q}{dt}\right)^2,$$

wie es aus der vorhergehenden Entwicklung hervorgeht, enthalten ist und daher ein entsprechender Abzug durch das 2. Glied eintreten muss.

Die *Lagrange*sche Bewegungsgleichung erscheint gewissermassen als algebraische Umformung eines ursprünglich einzigen Ausdrucks[17]) der dynamischen Grundgleichung zu dem Zwecke, unter Einführung einer einzigen Bezugsgrösse, der lebendigen Kraft des Systems, die Lösung eines kinetischen Problems durch bekannte rechnerische Operationen zu erreichen.[18])

Bei dem zu betrachtenden Kurbelgetriebe liegt ein System vor, bei welchem ein Glied, die Kurbel, eine Kreisbewegung ausführt, auf welche die Bewegung der übrigen, mit der Kurbel in zwangläufigem Zusammenhang stehenden Glieder bezogen wird. Der Drehwinkel φ der Kurbel, gemessen von der inneren (gestreckten) Totlage, ist also die Grundvariable der Systembewegung, $\frac{d\varphi}{dt}$ die Systemgeschwindigkeit.

Die Aufstellung der Bewegungsgleichung erfordert zunächst die Bestimmung des

1. Ausdruckes für die lebendige Kraft.

Die lebendige Kraft des Kurbelgetriebes ergibt sich als Summe der lebendigen Kräfte seiner einzelnen Glieder, nämlich der rotierenden Teile: Kurbel, Welle, Schwungrad usw., der hin- und hergehenden Teile: Kolben, Kolbenstange und Kreuzkopf, und der Lenkstange mit einer gemischten Bewegung von Rotation und Translation. Die Aufstellung des Ausdruckes für die lebendige Kraft des ganzen Systems gestaltet sich einfach; man kann auch

---

[17]) s. die Entwicklung der *Lagrange*schen Gleichung in *Föppls* Dynamik S. 286.

[18]) Bei einem Grad der Freiheit ist die *Lagrange*sche Gleichung identisch mit der Gleichung des Effekts, deren Zeitintegral das Prinzip der lebendigen Kraft oder die Energiegleichung ist.

vorher eine geeignete Veränderung desselben durch Reduktion und Verlegung der Massen vornehmen. Ein solches Verfahren beeinflusst das Resultat in kinetischer Beziehung nur dann nicht, wenn durch die Reduktion bezw. Verlegung der bewegten Massen ihre lebendige Kraft ungeändert bleibt.

Es mag an dieser Stelle schon bemerkt werden, dass, so lange es sich lediglich um die Untersuchung der Bewegungsverhältnisse handelt, in derselben Weise auch mit den an dem Getriebe angreifenden äusseren Kräften verfahren werden kann, wenn nur deren Arbeitsleistung $\Sigma P \, . \, v$ durch die Reduktion nicht verändert wird.

Unter Beachtung dieser Bedingung können alle rein rotierenden Massen ohne weiteres auf den Kurbelzapfen reduziert und die translatorischen Massen in den Kreuzkopfzapfen verlegt gedacht werden. Bei der Lenkstange ist ein so einfaches Verfahren nicht möglich. Es wird zwar meist eine Verlegung der Lenkstangenmasse in ihre zwei Endpunkte, den Kurbel- und Kreuzkopfzapfen, vorgenommen — der dadurch entstehende Fehler ist für viele praktische Fälle auch ohne Bedeutung und nur mit Rücksicht auf mehrfach in der Literatur vorkommende irrtümliche Darstellungen ist im folgenden der strenge Sachverhalt hervorgehoben — streng genommen ist aber der Ersatz der Lenkstangenmasse nur durch drei Massenpunkte, [19]) durch Verlegung der Masse in die Endpunkte und in den Schwerpunkt der Stange, möglich. [20]) — Wir könnten eine solche Massenverlegung in den drei Punkten jetzt vornehmen, lassen jedoch zunächst die Masse der Lenkstange M_3 in ihrer wirklichen Verteilung

---

[19]) s. *Reye*, Einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren. Z. d. V. d. I. 1875, S. 401.

Es lässt sich auch die Reduktion der Massen eines Getriebes auf einen einzigen Punkt ausführen, dessen lebendige Kraft diejenige des ganzen Getriebes repräsentiert, dessen reduzierte Masse jedoch bei der Bewegung veränderlich anzunehmen wäre. Danach kann die Bewegung eines zwangläufigen Getriebes auf die Bewegung eines Punktes mit veränderlicher reduzierter Masse zurückgeführt werden.

[20]) Ausser den Bedingungen $m_1 + m_2 + m_0 = M_3$ und $m_1 a = m_2 \, . \, b$ muss die neue Massenverteilung in drei Punkten noch der Forderung entsprechen $m_1 \, . \, a^2 + m_2 \, . \, b^2 =$ dem Trägheitsmoment der Stange in bezug auf den Schwerpunkt, wenn a und b die Abstände von m_1 und m_2 vom Schwerpunkt bedeuten, in welchem die Masse m_0 konzentriert ist.

bestehen, während wir auf den Kurbelzapfen alle rotierenden Massen M_1 reduzieren und in den Kreuzkopfzapfen alle hin- und hergehenden Massen M_2 verlegen. Denkt man sich die Massen M_1 und M_2 als zur Lenkstange gehörig, deren Enden gewissermassen mit diesen Massen belastet, so repräsentiert die Stange in dieser Belastungsweise das ganze Getriebe. Hiervon ausgehend ist es nun leicht, die lebendige Kraft des ganzen Systems aufzustellen.

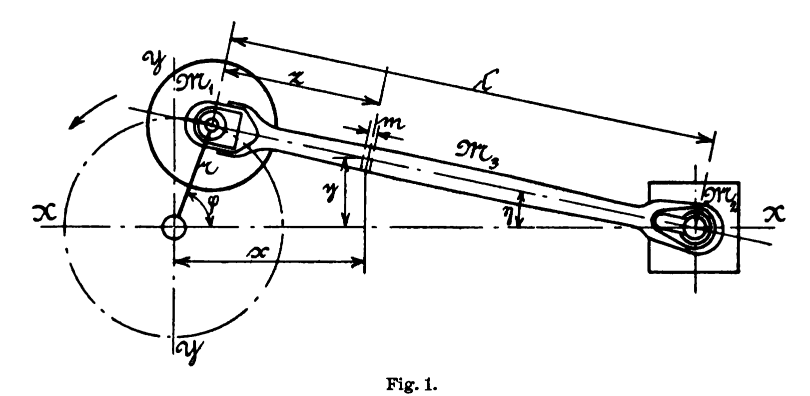


Fig. 1.

Ist m ein Massenteilchen der Lenkstange in der obigen Belastungsweise, v dessen augenblickliche Geschwindigkeit, so ist

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m v^2.$$

Für ein Achsenkreuz $X Y$ durch das Wellenmittel können die Komponenten der Geschwindigkeit v leicht bestimmt werden und daraus v selbst (s. Fig. 1).

Sind x und y die Koordinaten des Schwerpunktes des Massenteilchens m (M_3 auf der Stangenachse konzentriert angenommen) [21]) in bezug auf das Achsenkreuz $X Y$, so liefert der geometrische Zusammenhang des Getriebes hierfür die Ausdrücke

$$x = r \cos \varphi + z \cos \eta$$

und

$$y = r \sin \varphi - z \sin \eta$$

wenn r den Kurbelradius und z den Abstand des Massen-

[21]) Der allgemeine Fall erledigt sich zwar ebenso einfach.

teilchens vom Kurbelzapfen bedeutet. Die Geschwindigkeitskomponenten des Massenteilchens in den Achsrichtungen sind dann

$$\frac{dx}{dt} = -\left(r \sin \varphi + z \sin \eta \frac{d\eta}{d\varphi}\right) \frac{d\varphi}{dt}$$

und
$$\frac{dy}{dt} = \left(r \cos \varphi - z \cos \eta \frac{d\eta}{dt}\right) \frac{d\varphi}{dt}$$

Die Resultierende aus den Geschwindigkeitskomponenten ergibt

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Im folgenden werden die ersten und zweiten Ableitungen der Variabeln φ nach der Zeit d. h. die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ und die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ in vereinfachter Weise mit $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ bezeichnet. Damit lautet der Ausdruck für die lebendige Kraft

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \frac{1}{2} \Sigma\left(m r^2 + m z^2 \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right)^2 - 2 m r z \frac{d\eta}{d\varphi} \cos(\varphi + \eta)\right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \left[r^2 \Sigma m + \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right)^2 \Sigma m z^2 - 2 r \frac{d\eta}{d\varphi} \cos(\varphi + \eta) \Sigma m z\right]$$

In diesem Ausdruck ist

$$\Sigma m = M_1 + M_2 + M_3,$$

ferner nach dem Schwerpunktssatze

$$\Sigma m z = z_0 \Sigma m = z_0 (M_1 + M_2 + M_3),$$

wenn z_0 den Schwerpunktsabstand der Lenkstange für unsere Belastungsweise bedeutet. Derselbe lässt sich aus der Momentengleichung in bezug auf den Kurbelzapfen finden

$$\int_0^l z m_3 \, dz + l M_2 = (M_1 + M_2 + M_3) z_0.$$

Hierbei ist

$$\int_0^l z\, m_3\, d\, z = z_0{}'\, M_3$$

mit z'_0 als Schwerpunktsabstand der Lenkstange allein vom Kurbelzapfen; es sei $z'_0 = a\, l$. Schliesslich ist $\Sigma\, m\, z^2$ das Trägheitsmoment der ganzen bewegten Masse des Getriebes in bezug auf den Kurbelzapfen $= (M_1 + M_2 + M_3)\, k^2$, wenn k den Trägheitsradius der gesamten Masse in bezug auf den Kurbelzapfen bedeutet. k findet man wieder aus einer Momentengleichung für den Kurbelzapfen als Drehpunkt, wenn man jetzt die Produkte aus den Massen und ihren Abständen vom Kurbelzapfen als Kräfte betrachtet, welche die Lenkstange belasten:

$$\int_0^l (m_3\, z)\, z\, d\, z + (M_2\, l)\, l$$
$$= [(M_1 + M_2 + M_3)\, k]\, .\, k.$$

Hierbei ist

$$\int_0^l m_3\, z^2\, d\, z = z'^2\, \mathrm{M}_3$$

mit z' als Trägheitsradius der Lenkstange *allein* in bezug auf den Kurbelzapfen; es sei $z'^2 = b\, .\, l^2$.

Zur Kenntnis der Grössen z_0 und k ist demnach die Bestimmung des Schwerpunktsabstandes und des Trägheitsradius der wirklichen Lenkstange erforderlich; das kann durch eine graphische Ausmittlung nach dem Verfahren von *Nehls* oder *Mohr* oder für eine ausgeführte Lenkstange durch einen Wäge- und Schwingungsversuch geschehen. Für die prismatische Lenkstange von gleichförmigem Querschnitt ist $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{3}$. Ueber diese Grössen bei ausgeführten Stangen kann nachstehende Tabelle [22]) einen Anhalt geben (in der letzten Kolonne ist der konstante Anteil der Lenkstangenmasse an der Schwungradwirkung angegeben (s. S. 14).

---

[22]) s. *Mollier,* Der Beschleunigungsdruck der Schubstange, Z. d. V. d. I. 1903, S. 1638.

No.	Art der Stange	Schwerpunktsabstand vom Kurbelzapfen z'_0	Trägheitsradius in bezug auf den Kurbelzapfen z'	a	b	$1-a+\frac{b}{2}$
1	Lokomotive (alt) .	0,37 l	0,584 l	0,37	0,34	0,80
2	Kleine schnellaufende Dampfmaschine	0,35 l	0,459 l	0,35	0,21	0,76
3	Kleiner Kompressor .	0,259 l	0,464 l	0,295	0,215	0,81
4	Dampfmaschine . .	0,35 l	0,548 l	0,35	0,30	0,8
5	Dampfmaschine . .	0,36 l	0,53 l	0,36	0,28	0,78
6	Schiffsmaschine . .	0,45 l	0,633 l	0,45	0,40	0,75
7	Gasmotor (alt) . .	0,45 l	0,648 l	0,45	0,42	0,76
8	Gasmotor	0,45 l	0,533 l	0,45	0,34	0,72
9	Gasmotor	0,40 l	0,533 l	0,4	0,34	0,77
10	Kl. Petroleummotor .	0,429 l	0,649 l	0,420	0,42	0,79

Führt man jetzt die Werte

$$\Sigma m = M_1 + M_2 + M_3,$$

$$\Sigma m z = l\,(M_2 + a\,M_3) \text{ und } \Sigma m z^2 = l^2\,(M_2 + b\,M_3)$$

in den Ausdruck für die lebendige Kraft ein, so lautet dieser

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \left[(M_1 + M_2 + M_3)\,r^2 + \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right)^2 l^2\,(M_2 + b\,M_3) - 2\,r\,l\,\frac{d\eta}{d\varphi}\cos(\varphi + \eta)\,(M_2 + a\,M_3)\right] \quad . \quad . \quad 2)$$

Dieser Ausdruck bildet die Grundlage für die Aufstellung der Bewegungsgleichung des Kurbelgetriebes.

2. Bewegungsgleichung des Kurbelgetriebes.

Die Bewegung des Kurbelgetriebes geben wir in ihrer Abhängigkeit vom Drehwinkel φ der Kurbel an; mit dieser Koordinate lautet die *Lagrange*sche Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q \quad . \quad . \quad . \quad 1\,a)$$

Q ist hier, da es sich um eine Drehung handelt, die Summe der Momente aller äusseren Kräfte in bezug auf das Wellenmittel, also der treibenden und widerstehenden Kräfte und der Gewichte der Getriebeteile. Der nächste Abschnitt wird sich eingehender hiermit beschäftigen.

Die Lösung der Bewegungsgleichung erfordert die Ausführung der darin bezeichneten partiellen Differentiationen.

Es ist

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \left[2\,r\,l\,(M_2 + a\,M_3)\sin(\varphi + \eta)\left(1 + \frac{d\eta}{d\varphi}\right)\frac{d\eta}{d\varphi} - 2\,r\,l\,(M_2 + a\,M_3)\cos(\varphi + \eta)\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + 2\,l^2\,(M_2 + b\,M_3)\frac{d\eta}{d\varphi}\frac{d^2\eta}{d\varphi^2}\right]$$

ferner

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\left[r^2\,(M_1 + M_2 + M_3) - 2\,r\,l\,(M_2 + a\,M_3)\cos(\varphi + \eta)\frac{d\eta}{d\varphi} + l^2\,(M_2 + b\,M_3)\left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right)^2\right]$$

und durch weitere Differentiation nach der Zeit folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi}\left[r^2\,(M_1 + M_2 + M_3) - 2\,r\,l\,(M_2 + a\,M_3)\cos(\varphi + \eta)\frac{d\eta}{d\varphi} + l^2\,(M_2 + b\,M_3)\left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right)^2\right] + \dot{\varphi}^2\left[2\,r\,l\,(M_2 + a\,M_3)\sin(\varphi + \eta)\left(1 + \frac{d\eta}{d\varphi}\right)\frac{d\eta}{d\varphi} - 2\,r\,l\,(M_2 + a\,M_3)\cos(\varphi + \eta)\frac{d^2\eta}{d\varphi^2} + 2\,l^2\,(M_2 + b\,M_3)\frac{d\eta}{d\varphi}\frac{d^2\eta}{d\varphi^2}\right]$$

Diese Ausdrücke lassen sich nun mit Hilfe der geometrischen Beziehungen im Kurbelgetriebe umformen; es ist nämlich

$$l \sin\eta = r \sin\varphi \quad \text{oder mit} \quad \frac{r}{l} = \lambda$$

$$\sin\eta = \lambda \sin\varphi \quad \text{und} \quad \cos\eta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}$$

Zur Vereinfachung vernachlässigen wir in dem letzteren Wert das Glied mit λ^2, setzen also $\cos\eta = 1$.

Dem entspricht für ein Verhältnis des Kurbelradius zur Lenkstangenlänge $\lambda = \frac{1}{5}$ ein Fehler von 4 v. H. Auch im folgenden werden dann Glieder, die unter der Grösse λ^2 bleiben, konsequenterweise vernachlässigt.

Hiermit wird

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \lambda \cos \varphi \text{ und } \frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} = -\lambda \sin \varphi,$$

ferner

$$\sin (\varphi + \eta) = \sin \varphi \, (1 + \lambda \cos \varphi)$$
$$\text{und } \cos (\varphi + \eta) = \cos \varphi - \lambda \sin^2 \varphi$$

Nach Einführung dieser Werte lautet die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \Bigg[\left(M_1 + \frac{M_2}{2} + M_3 \left(1 - a + \frac{b}{2}\right)\right) r^2 \\ + \frac{r^2 \lambda}{2} (M_2 + a M_3) \cos \varphi - \frac{r^2}{2} \Big(M_2 + (2a - b) \\ M_3 \Big) \cos 2\varphi - \frac{r^2 \lambda}{2} (M_2 + a M_3) \cos 3\varphi \Bigg] \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Bigg[- \frac{r^2 \lambda}{2} (M_2 + a M_3) \sin \varphi \\ + r^2 (M_2 + (2a - b) M_3) \sin 2\varphi \\ + \frac{3 r^2 \lambda}{2} (M_2 + a M_3) \sin 3\varphi \Bigg] = Q \,. \quad \text{1b)}\end{aligned}$$

Betragen die Massen der rotierenden Teile, auf den Kurbelzapfen reduziert, mehr als das Dreifache der hin- und hergehenden Massen, so können die Glieder mit $\cos \varphi$ und $\cos 3\varphi$ mit Rücksicht auf die Vernachlässigung der Glieder mit λ^2 weggelassen werden.

Schreibt man die Bewegungsgleichung in der Form

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \Theta' + \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Theta'' = Q,$$

so erkennt man leicht die darin aus der Lehre für die Drehung eines starren Körpers bekannten Ausdrücke. Die Klammerwerte [] sind in Analogie zu den dort auftretenden

Grössen als Trägheitsmomente der reduzierten bewegten Massen zu deuten, die aber wegen der darin vorkommenden variabeln Glieder als veränderlich anzunehmen sind.

Man hat darnach in der Bewegungsgleichung eine Gleichgewichtsbedingung zwischen den Momenten der äusseren Kräfte und der durch die Bewegung entstehenden Massenkräfte, nämlich einmal der tangentialen Trägheitskräfte, welche infolge der Geschwindigkeitsschwankungen im Kurbelkreis entstehen, ausgedrückt durch das 1. Glied mit $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, dessen Klammerfaktor erkennen lässt, dass alle bewegten Massen zu diesen Trägheitskräften einen Beitrag liefern. Das 2. Glied ergibt alsdann das Moment derjenigen Trägheitskräfte in bezug auf das Wellenmittel an, welche infolge der dem Kurbeltrieb eigentümlichen absetzenden Bewegung in wagerechter und senkrechter Richtung auftreten.

Aus der Bewegungsgleichung kann die Grösse der Winkelbeschleunigung der Drehbewegung in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit aus dem Drehwinkel angegeben werden. Die Beschleunigung könnte als ein Mass für die Gleichförmigkeit der Drehbewegung betrachtet werden. Es ist indessen üblich, unter dem Ungleichförmigkeitsgrad das Verhältnis der Differenz der maximalen und minimalen Geschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit zu verstehen. Als mittlerer Wert der Geschwindigkeit wird gewöhnlich nicht das arithmetische Mittel der Grenzgeschwindigkeiten, sondern der mittlere Wert der Geschwindigkeit während einer Umdrehung gesetzt. Dagegen ist solange nichts einzuwenden, als an der einmal angenommenen Definition festgehalten wird. Die auf S. 56 auf den Ungleichförmigkeitsgrad bezügliche Stelle ist als ein Fall von Inkonsequenz nach dieser Richtung zu bezeichnen.

Wie sich aus der Bewegungsgleichung 1 b) ersehen lässt, hängt die Winkelbeschleunigung der Drehbewegung der Kurbel von dem Drehmoment der äusseren Kräfte Q, von den oben an zweiter Stelle bezeichneten Trägheitskräften und von dem Trägheitsmoment Θ' der bewegten Massen ab. Der konstante Teil von Θ' enthält die einer bestimmten Geschwindigkeitsschwankung entsprechende Schwungradmasse einschliesslich der übrigen rotierenden

Teile. $\left[\frac{M_2}{2} + \left(1 - a + \frac{b}{2}\right) M_3\right]$ gibt den konstanten Betrag an, mit welchem die Masse der Lenkstange und der hin- und hergehenden Teile an der Schwungradwirkung beteiligt sind. Dieser Betrag ist in den meisten Fällen belanglos. Wichtiger dagegen ist die Wirkung der Triebwerksmassen auf das Drehmoment an der Kurbel, welche in dem Gliede mit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ zum Ausdruck kommt und gerade bei höheren Geschwindigkeiten hervortritt.

Es ist das Verdienst *Radingers*, in seinem Werke: „Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit", im Gegensatz zu den bisherigen mehr kinematischen Behandlungen des Kurbelgetriebes mit allem Nachdruck auf die Massenwirkungen des Gestänges in ihrem Einfluss auf die Bewegung des Getriebes, auf das Glied mit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ der Bewegungsgleichung, hingewiesen zu haben.

Radinger kombiniert in einem äusserst anschaulichen graphischen Verfahren den Dampfdruck mit dem wagerechten Massendruck des Gestänges, um hieraus die Drehkraft im Kurbelkreis zu bestimmen. Das Moment des Massendrucks in bezug auf das Wellenmittel, einschliesslich des von dem transversalen Ausschwingen der Lenkstange herrührenden Anteiles, wird aber durch unser Glied der Bewegungsgleichung mit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ dargestellt. Dieses erscheint bei *Radinger* nur auf die rechte Seite der Gleichung gesetzt und dort mit dem Moment der äusseren Kräfte Q vereinigt, wodurch das Verständnis für die Wirkung der Massen auf das Drehmoment sehr gefördert wird. Man hat *Radinger* vielfach als den Entdecker des Massendrucks bezeichnet; nicht mit Recht. Die Wirkung der Massen auf die Bewegung der Maschinengetriebe und auf die Reaktionen in denselben ist vor *Radinger* in der Literatur,[23]) insbesondere von *Poncelet* und *Le Chatelier* behandelt worden, jedoch in einer Form, die bei den Ingenieuren wenig Eingang fand. Auch der ausführende Maschinenbau hatte, wo es sich um die Beanspruchung rasch bewegter Teile handelte, lange vorher

---

[23]) s. *Bach:* Maschinenelemente. 9. Aufl., S. 677.

mehr oder weniger zielbewusst die Massenwirkungen berücksichtigt, Es bleibt jedoch das unbestreitbare, grosse Verdienst *Radingers*, durch seine äusserst klare und ursprüngliche Darstellung der Massenwirkungen deren Kenntnis zum Gemeingut der Ingenieure gemacht, oder wie es *Sommerfeld* an einer Stelle[24]) treffend bezeichnet, das dynamische Gewissen des Technikers geweckt zu haben.

Die vollständige Lösung der Bewegungsgleichung, d. h. die Darstellung des Beschleunigungsprozesses bei der Drehbewegung im Kurbelkreis in seiner Abhängigkeit vom Kurbelwinkel allein, erfordert noch die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ als Funktion des Kurbelwinkels.

Die Winkelgeschwindigkeit im Kurbelkreis ist die Folge des gesamten Energieaustausches im Getriebe. Die in dasselbe durch die Triebkraft eingeleitete Energie samt der potentiellen Energie der Triebwerksgewichte überwindet die Widerstände. Ist aber in einem Augenblick die Triebkraft $\pm$ Schwerkraft der bewegten Massen grösser oder kleiner als die Widerstände, so bewirkt deren Differenz die Zunahme bezw. Abnahme der Geschwindigkeit, also der lebendigen Kraft der Maschine. Mit anderen Worten: die Aenderung der kinetischen und potentiellen Energie im Getriebe von einer Anfangslage aus muss nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie gleich der Arbeitsleistung der treibenden und widerstehenden Kräfte in dem betrachteten Abschnitt der Bewegung sein.

Als Anfangslage ist der innere Totpunkt der Kurbel gewählt. Die Arbeitsleistung der äusseren Kräfte — der Triebkraft, des Widerstandes und der Schwerkraft der bewegten Massen — bei der Drehung der Kurbel aus der inneren Totlage um den Winkel φ

$$= \int_0^{\varphi} Q \, d\varphi;$$

die Grösse Q wird im nächsten Abschnitt behandelt. Diese Arbeit ist der Aenderung der kinetischen Energie

---

24) *Sommerfeld:* Naturwissenschaftliche Ergebnisse der neueren technischen Mechanik. Z. d. V. d. I. 1904, S. 634.

oder der lebendigen Kraft von der inneren Totlage bis zur Drehung um Winkel φ gleichzusetzen, also

$$L - L_0 = \int_0^{\varphi} Q \, d\varphi \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

wenn L die lebendige Kraft bei Stellung φ und L_0 diejenige in der Totlage $\varphi = o$ bedeutet. Wir führen jetzt in den früher gefundenen Ausdruck für die lebendige Kraft des Kurbelgetriebes die auf Seite 16 bezeichnete Vereinfachung mit $\cos \eta = 1$ ein und erhalten

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left[\left(M_1 + \frac{M_2}{2} + M_3\left(1 - a + \frac{b}{2}\right)\right) r^2 - \left(\frac{M_2}{2} + \left(a - \frac{b}{2}\right) M_3\right) r^2 \cos 2\,\varphi + \frac{r^2\,\lambda}{2}\,(M_2 + a\,M_3)\,(\cos\varphi - \cos 3\,\varphi)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\,\mathrm{a})$$

Das letzte Glied in der Klammer [ ] ist in den meisten Fällen gegenüber dem konstanten Gliede von der Grössenordnung λ^2 und kann vernachlässigt werden.

Mit $\varphi = o$ erhält man die lebendige Kraft im Totpunkt

$$L_0 = \frac{r^2}{2}\,[M_1 + M_3\,(1 - 2\,\mathrm{a} + \mathrm{b})] = \left(\frac{d\,\varphi_0}{dt}\right)^2 \frac{\Theta_0}{2}.$$

Hierin ist $\frac{d\varphi_0}{dt}$ die Geschwindigkeit im toten Punkt. Diese setzt man in der Regel gleich dem Werte der mittleren Geschwindigkeit während einer Umdrehung

$$= \frac{d\varphi_m}{dt} = \frac{2\,\pi\,.\,n}{60},$$

wenn n die Anzahl der Umdrehungen in der Minute ist. Für geringe Schwankungen der Geschwindigkeit ist dies mit grosser Annäherung zutreffend. Man erhält jedoch einen genaueren Wert für die Totpunktgeschwindigkeit durch die Betrachtung des Ausdruckes

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)^2 \frac{\Theta_0}{2} + \int_0^{\varphi} Q\,d\varphi}{\frac{1}{2}\,\Theta'}$$

(dessen Glieder sich aus konstanten und periodischen Faktoren zusammensetzen). Die vollständige Entwicklung ergibt, wie das ein Beispiel an späterer Stelle noch näher zeigen wird, eine periodische Reihe. Die konstanten Glieder derselben, die auch die Totpunktgeschwindigkeit enthalten, können im Beharrungszustand der Maschine dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit gleich gesetzt werden, da die mit dem Kurbelwinkel φ periodischen Glieder im Verlaufe einer vollen Umdrehung verschwinden.

Es muss noch auf eine Ungenauigkeit hingewiesen werden, welche der Bestimmung der Geschwindigkeit aus der Energiegleichung bei dem hier eingeschlagenen Wege anhaftet. Der Verlauf der Geschwindigkeit während einer Umdrehung ist in Beziehung gebracht worden mit ihrem mittleren Wert $\frac{2\pi\, n}{60}$. $\frac{60}{n}$ ist aber die Zeit einer Umdrehung in Sekunden, wenn n die Zahl der Umdrehungen in der Minute ist; es sollte daher als unabhängige Variable die Zeit und nicht der Kurbelwinkel eingeführt werden. Der Ausdruck von Q ist jedoch, wie aus dem nächsten Abschnitt hervorgeht, auf der Basis des abgewickelten Kurbelkreises gegeben, enthält also φ als Variable. Mit der Einführung des auf den Kurbelwinkel bezogenen Momentes der äusseren Kräfte in die Energiegleichung ist stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, dass gleichen Zeiten auch gleiche zurückgelegte Drehwinkel entsprechen. Das ist natürlich nur für konstante Umdrehungsgeschwindigkeit der Fall. In Anbetracht einer Durchführung der Aufgabe mit einfachen Mitteln wird man diese Ungenauigkeit, die erst bei beträchtlichen Geschwindigkeitsschwankungen hervortritt, in Kauf nehmen.[25])

Eine weitere Einschränkung ist bei der Aufstellung der Energiegleichung gemacht worden, nämlich die Vor-

---

[25]) In Kürze sei noch ein Weg angedeutet, der bei starken Geschwindigkeitsschwankungen einzuschlagen wäre und darauf hinausläuft, die äusseren Kräfte in Abhängigkeit von der Zeit darzustellen. Zu diesem Zwecke bildet man nach den obigen Ausführungen einen ersten Wert für das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit. Die erste Potenz jeder Ordinate derselben auf der Basis des abgewickelten Kurbelkreises aufgetragen, gibt den Verlauf der Geschwindigkeit selbst; nach dessen Analyse nach dem später angegebenen Verfahren erhält man $\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi)$ und

aussetzung starrer Getriebeteile oder doch solcher, deren elastische Deformation von untergeordneter Grösse ist. Bei grösseren Formänderungen der die Energie übertragenden Teile, z. B. der langen Propellerwellen der Schiffsmaschinen, muss zur Bestimmung der Bewegungsverhältnisse noch die Formänderungsarbeit als weiteres Glied in die Energiegleichung eintreten.

Die Geschwindigkeit als Funktion des Kurbelwinkels wird nun in die Bewegungsgleichung 1 b eingesetzt, welche jetzt als einzige unabhängige Variable nur noch den Kurbelwinkel enthält. Somit können jetzt alle für die Bewegung des Systems massgebenden Grössen, die lebendige Kraft, die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung [26]) für jeden Punkt des Kurbelkreises angegeben werden, auch die Bewegungsverhältnisse der einzelnen Glieder des Kurbelgetriebes auf Grund ihres geometrischen Zusammenhanges, z. B. die in der *Radinger*schen Darstellung besonders

---

mit Hilfe der Beziehung

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} \cdot d\varphi$$

die Abhängigkeit des Kurbelwinkels von der Zeit. Es wird jetzt ein neues Tangentialdruckdiagramm gebildet, dessen gleiche Abszissenabschnitte gleichen Zeitteilen entsprechen. Die Ordinaten des neuen Diagramms erscheinen gegenüber dem ersteren an einigen Stellen zusammengedrängt, an anderen auseinander gezogen. Damit erhält man nach vorgenommener Analyse in erster Annäherung

$$Q = F(t)$$

und nach Einführung in die Energiegleichung 3) einen zweiten Näherungswert für die Geschwindigkeit. Wenn nötig, müsste dieses Verfahren in alternierender Weise fortgesetzt werden.

[26]) Statt die Beschleunigung der Drehbewegung aus der *Lagrange*schen Bewegungsgleichung zu bestimmen, hätten wir diesen Wert auch durch die weitere Bearbeitung der Energiegleichung 3), durch Differentiation des aus dieser gewonnenen Ausdruckes für die Geschwindigkeit nach der Zeit, finden können. Die *Lagrange*sche Methode ist aber noch weiter verwendbar, zur Ermittlung der vollständigen Reaktionen und Spannungen im Kurbelgetriebe in ihrer Abhängigkeit von der jeweiligen Kurbelstellung, wie es in Abschnitt B gezeigt wird. Unter diesem Gesichtspunkte kann ihre vorherige Anwendung bei dem kinetischen Teil dieser Arbeit zur Vorbereitung für den folgenden kinetostatischen Teil dienen.

wichtige Grösse der Beschleunigung in Richtung des Kolbenlaufes. Diese folgt aus dem Kolbenweg (Ausweichung aus der Hubmitte)

$$x = r \cos \varphi - \frac{\lambda}{2} r \sin^2 \varphi$$

durch zweimalige Differentiation nach der Zeit

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 (\cos \varphi + \lambda \cos 2 \varphi)$$

$$- r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2 \varphi\right)$$

Hier werden $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2}\right)$ eingesetzt. In vielen Fällen genügt es, die Kurbelgeschwindigkeit konstant, also $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$ zu setzen. Das ergibt für die Kolbenbeschleunigung einen graphisch leicht zu behandelnden Ausdruck. Für beträchtliche Geschwindigkeitsschwankungen im Kurbelkreis ist diese Vereinfachung nicht mehr zulässig. [27])

Interessiert es, den Anteil zu kennen, der vom äusseren Moment bezw. vom treibenden Druck am Kolben aufgewendet werden muss, um die Lenkstange allein zu beschleunigen [28]) — für die in der Richtung des Kolbenlaufes bewegten Massen ist der Anteil gleich dem Produkt aus diesen Massen und der Kolbenbeschleunigung — so führt zur Entscheidung dieser Frage sehr leicht die Anwendung der *Lagrange*schen Methode. Die zur Beschleunigung der Lenkstange allein erforderliche Drehkraft sei T_b; das Moment $T_b \,.\, r$ tritt auf die rechte Seite der *Lagrange*schen Gleichung. Als Koordinate des Systems nehmen wir wieder den Drehwinkel der Kurbel φ. Dann lautet die Bewegungsgleichung (für die gewichtslose Stange)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_e}{\partial \frac{d\varphi}{dt}}\right) - \frac{\partial L_e}{\partial \varphi} = T_b \,.\, r.$$

---

[27]) s. *Frahm*, Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen. Z. d. V. d. I. 1902, S. 883.

[28]) s. *Mollier*, Der Beschleunigungsdruck der Schubstange. Z. d. V. d. I. 1903, S. 1638. — Eine erschöpfende Behandlung des Lenkstangenproblems findet sich in einem Aufsatze von *Dunkerley* im Juniheft des „Engineering", Jahrgang 1899, S. 695.

Die lebendige Kraft der Lenkstange L_e entnehmen wir dem Ausdruck der lebendigen Kraft für das ganze Getriebe 2), indem wir darin die Massen M_1 und $M_2 = o$ setzen; wir haben dann in gleicher Weise wie früher die Differentiationen auszuführen, um die Grösse T_b zu erhalten. Ist der am Kolben oder Kreuzkopf angreifende Druck P' gesucht, so benutzen wir die später entwickelte Beziehung desselben zum Tangentialdruck

$$P' = \frac{T_b \cos \eta}{\sin (\varphi + \eta)}.$$

Zur Beantwortung der Frage nach der vom Kolbendruck zur Beschleunigung der Lenkstange aufzuwendenden Kraft mit Hilfe der synthetischen Methode ist die Lenkstange als aus dem Zusammenhange des Getriebes gelöst zu betrachten. Die Gleichgewichtsbedingung der an der bewegten Lenkstange angreifenden Kräfte d. s. der gesuchten Kraft P', der Trägheitskräfte der Lenkstange und der Ersatzkraft für die Reaktion an der Trennungsstelle vom übrigen Getriebe, also am Kurbelzapfen, ergibt das gewünschte Resultat, in welchem jedoch noch die Grösse der Reaktion am Kurbelzapfen unbekannt ist. Es bedarf noch einer weiteren Beziehung, des Gleichgewichtes gegen Drehung um einen beliebigen Punkt durch die an der Lenkstange angreifenden Kräfte, um die unbekannte Reaktion, die bei der Betrachtung der Bewegung des ganzen Systems entfällt, eliminieren zu können.

3. Die äusseren Kräfte.

Die auf das Kurbelgetriebe von aussen einwirkenden Kräfte sind die Triebkraft, welche bei Kraftmaschinen am Kolben angreift, der nutzbare Widerstand, welcher in Richtung der Kolbenbewegung, der Triebkraft entgegengesetzt, oder senkrecht zur Kurbelrichtung wirkt, die Reibungskräfte, der Bewegungsrichtung entgegenwirkend, und die Schwerkraft oder das Gewicht der Getriebeteile. Zu letzteren gehören: das Gewicht der nicht ausgeglichenen Kurbel, der Lenkstange und des Kreuzkopfes, der Kolbenstange und des Kolbens. Die Angriffspunkte sind die zugehörigen Schwerpunkte dieser Teile (s. Fig. 2).

Die treibende Kraft und der Nutzwiderstand sind gewöhnlich durch Diagramme in ihrem Verlaufe gegeben.

Die Reibung im Kurbelmechanismus ist entweder von der Kraftkurve abzuziehen oder der Widerstandskurve zuzufügen.

Es muss das Moment aller Kräfte in bezug auf den Drehpunkt der Kurbel bestimmt werden. Bezüglich der Gewichte der Getriebeteile können bei einer liegenden Maschine natürlich die im Kreuzkopf vereinigten Gewichte der nur hin- und hergehenden Teile keine Drehung der

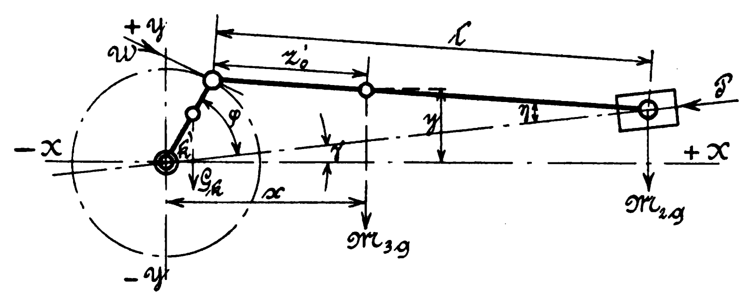


Fig. 2.

Kurbel hervorrufen, da deren Druck von der Gleitbahn direkt aufgenommen wird, im Gegensatz zu der nicht unbeträchtlichen Gewichtswirkung dieser Teile bei stehenden Maschinen. Um beide Fälle nebeneinander behandeln zu können, werde ein Neigungswinkel γ der Gleitbahn gegen die Wagerechte eingeführt.

Die Grösse des Gesamtdrehmomentes an der Kurbel Q erhält man unter Anwendung des Prinzipes der virtuellen Arbeiten, welches lautet:

$$\Sigma K_1 \, \delta x + \Sigma K_2 \, \delta y = Q \, \delta \varphi,$$

wenn K_1 und K_2 die Komponenten der äusseren Kräfte in den Richtungen X und Y und δx und δy die Verschiebungen sind, welche die Punkte, an denen die Kräfte K_1 und K_2 angreifen, bei einer gedachten Drehung der Kurbel um $\delta \varphi$ erleiden. Die Summe der Kräfte setzt sich zusammen aus den Kräften, welche an den einzelnen Gliedern des Getriebes angreifen (Fig. 2). Bei der Kurbel greift im Zapfen der reduzierte Widerstand W an, im Schwerpunkt G_k, letztere ebenfalls auf den Zapfen reduziert $= G_k \cdot \frac{k'}{r}$.

Die Komponenten in den Achsrichtungen sind demnach

$$K_1 = + W \sin(\varphi + \gamma) \text{ in der } X\text{-Richtung},$$

$$K_2 = - W \cos(\varphi + \gamma) - G_k \frac{k'}{r} \text{ in der } Y\text{-Richtung.}$$

Die virtuellen Verschiebungen sind, da $x = r \cos(\varphi + \gamma)$ und $y = r \sin(\varphi + \gamma)$,

$$\delta x = - r \sin(\varphi + \gamma)\, \delta\varphi \quad \text{und} \quad \delta y = r \cos(\varphi + \gamma)\, \delta\varphi.$$

An der Lenkstange greift lediglich ihr Gewicht im Schwerpunkt an.

Es ist also $K_1 = o$ und $K_2 = - M_3 . g$; die virtuellen Verschiebungen mit

$$x = r \cos(\varphi + \gamma) + z'_o \cos(\eta - \gamma)$$

und

$$y = r \sin(\varphi + \gamma) - z'_o \sin(\eta - \gamma)$$

sind

$$\delta x = - r \sin(\varphi + \gamma)\, \delta\varphi - z'_o \sin(\eta - \gamma)\, \delta\varphi . \frac{d\eta}{d\varphi}$$

und

$$\delta y = r \cos(\varphi + \gamma)\, \delta\varphi - z'_o \cos(\eta - \gamma)\, \delta\varphi \frac{d\eta}{d\varphi}.$$

Am Kreuzkopf greifen an:

in wagerechter Richtung $- P \cos\gamma$,

in senkrechter Richtung $- P \sin\gamma$

und das Gewicht der hin- und hergehenden Teile $- M_2\, g$, also

$$K_1 = - P \cos\gamma; \; K_2 = - P \sin\gamma - M_2\, g.$$

Die virtuellen Verschiebungen in den Achsrichtungen haben denselben Ausdruck wie diejenigen des Schwerpunktes der Lenkstange, wenn für z'_o die Stangenlänge l gesetzt wird. Es ist demnach

$$Q = - W . r + P \cos\gamma \left(r \sin(\varphi + \gamma) + l \sin(\eta - \gamma) \frac{d\eta}{d\varphi}\right)$$

$$- G_k\, k' \cos(\varphi + \gamma) - M_3\, g \left(\cos(\varphi + \gamma)\right.$$

$$\left. - z'_o \cos(\eta - \gamma) \frac{d\eta}{d\varphi}\right) - (P \sin\gamma + M_2\, g) \left(r \cos(\varphi + \gamma)\right.$$

$$\left. - l \cos(\eta - \gamma) \frac{d\eta}{d\varphi}\right).$$

Für liegende Maschinen ist $\gamma = 0^0$ und

$$Q = -W \cdot r + P \cdot r \frac{\sin(\varphi + \eta)}{\cos \eta} - \left(G_k k' + M_3 g r (1 - a)\right) \cos \varphi,$$

für stehende Maschinen ist $\gamma = 90^0$ und

$$Q = -W \cdot r + P r \frac{\sin(\varphi + \eta)}{\cos \eta} + \left(G_k k' + (M_2 + M_3) g r\right) \sin \varphi + (M_2 + a M_3) g \cdot r \frac{\sin(\varphi + \eta)}{\cos \eta}.$$

$\dfrac{P \sin(\varphi + \eta)}{\cos \eta}$ ist die Tangentialkomponente T des Kolbendruckes im Kurbelkreis; auch der Widerstand kann in der Richtung des Kolbenweges wirken und in seinem Verlaufe in gleicher Weise wie der treibende Druck durch ein Indikatordiagramm gegeben sein. In diesem Falle ist dessen Tangentialkomponente ebenso zu bilden. Zur weiteren Verwertung dieser Ausdrücke für die Bewegungsgleichung 1 b) ist die analytische Darstellung derselben notwendig.

Für die Tangentialkomponente der Triebkraft könnte man z. B. bei einer Dampfmaschine einen Kolbendruck zugrunde legen, welcher sich nach einem gesetzmässig angenommenen Verlauf (z. B. Expansion und Kompression nach dem Hyperbelgesetz) ändert. Diesen Weg schlagen *Grashof*[29]) und *Weisbach*[30]) ein. Die folgende Behandlung des Tangentialdruckes geht von dessen tatsächlichen Verlauf aus. Es ist die Tangentialkomponente zunächst aus dem Kolbenüberdruck zu bilden und auf der Basis des abgewickelten Kurbelkreises aufzutragen. Das kann entweder auf graphischem Wege geschehen, wie es aus den späteren Fig. 8 und 9 hervorgeht, oder mit Hilfe umstehender Tabelle, welche für 24 Teile des Kurbelkreises die Werte von $\dfrac{\sin(\varphi + \eta)}{\cos \eta}$ enthält und für drei verschiedene Stangenverhältnisse $\lambda = \dfrac{r}{l} = {}^1/_4, {}^1/_5$ und ${}^1/_6$ benutzt werden kann.

---

[29]) Theoretische Maschinenlehre, Bd. 2, S. 371.

[30]) Ingenieur- und Maschinenmechanik, III/I, S. 744.

Winkel in Graden	0	15	30	45
	360	345	330	315
Winkel in Bogenmass	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$
	2π	$23\pi.12$	$11\pi/6$	$7\pi/4$
$\frac{\sin(\varphi+\eta)}{\cos\eta}$. $\lambda = 1/4$ . .	0	0,321	0,608	0,832
$\lambda = 1/5$ . .	0	0,309	0,585	0,808
$\lambda = 1/6$ . .	0	0,301	0,572	0,790

In den unregelmässigen Schwankungen des Tangentialdruckes erkennt man zunächst nur die *eine* Gesetzmässigkeit: nämlich die Periodizität mit der Dauer einer (oder mehrerer) Umdrehungen, welche im Beharrungszustand der Maschine vorhanden ist. Mögen nun diese periodischen Schwankungen innerhalb eines Umlaufes ganz beliebige sein, immer lässt sich nach dem *Fourier*schen Theorem der unregelmässige Verlauf in eine Reihe gesetzmässiger Schwankungen auflösen, welche in unserem Falle, entsprechend der Darstellung der Tangentialkräfte über dem abgewickelten Kurbelkreis, nach Vielfachen des Sinus und Cosinus des Drehwinkels fortschreiten.

Die Reihe für den Tangentialdruck lautet darnach:

$$T = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \ldots\ldots$$
$$+ B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \ldots\ldots$$

Die Koeffizienten A und B bestimmen sich aus

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T \cos n\varphi\, d\varphi$$

$$\text{und } B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T \sin n\varphi\, d\varphi$$

Aus dem ursprünglichen Tangentialdruckdiagramm ist hiernach ein neues zu bilden, indem man die einzelnen Werte des Tangentialdruckes mit dem sin bezw. cos des n-fachen Kurbelwinkels an der zugehörigen Stelle multipliziert und die graphische Integration der von den Kurven eingeschlosse-

60	75	90	105	120	135	150	165	180
300	285	270	255	240	225	210	195	
$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	$7\pi/12$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$11\pi/12$	π
$5\pi/3$	$19\pi/12$	$3\pi/2$	$17\pi/12$	$4\pi/3$	$5\pi/4$	$7\pi/6$	$13\pi/12$	
0,975	1,029	1,000	0,903	0,757	0,581	0,391	0,196	0
0,954	1,021	1,000	0,915	0,780	0,605	0,415	0,208	0
0,940	1,010	1,000	0,924	0,794	0,624	0,428	0,217	0

nen Flächen mit Hilfe der Integralkurve[31]) oder mit dem Planimeter vornimmt. A_0 ist offenbar der mittlere Wert des Tangentialdruckes während einer Umdrehung, der im Beharrungszustand gleich demjenigen des Widerstandes sein muss. In gleicher Weise kann der Widerstand durch eine periodische Reihe dargestellt werden. In der Verbindung $(T - W)$ beider Reihen verschwindet dann das konstante Glied. Man kann noch die Koeffizienten entsprechender Glieder zusammenfassen und ausserdem der Reihe noch die Form geben

$$(T - W) = \mathfrak{A}_1 \cos (\varphi + \varepsilon_1) + \mathfrak{A}_1 \cos 2 (\varphi + \varepsilon_2) + \ldots$$

worin $\mathfrak{A}_1 = \sqrt{A'^2_1 + B'^2_1}$ usw. und ε Phasenwinkel be-

[31]) In der später folgenden Fig. 10 ist die Konstruktion der Integralkurve für die rechte Diagrammhälfte angegeben. Das Verfahren beruht auf der Verwandlung aller Flächenstreifen, in welche das Tangentialdruckdiagramm zerlegt ist, in Rechtecke von der Basis 12—24. Man projiziert zu diesem Zwecke die Punkte *a, b, c* usw. (der mittleren Höhen der Flächenstreifen) auf die letzte Ordinate und bringt mit dem Strahl 12 *a'* die mittlere Ordinate des Flächenstreifens 12 - 13 in *p* zum Schnitt, darauf zieht man *p q* || zum Strahl 12 *b'*, *q r* || 12 *c'* u. s. f. Auf diese Weise werden die in Rechtecke von der Basis 12—24 verwandelten Flächenstreifen gleichzeitig addiert; man erhält in der letzten Ordinate 24 in T_{m_2} die Höhe des Rechteckes mit der Basis 12—24, welches dem Inhalt der rechten Diagrammhälfte gleich ist d. h. die mittlere Höhe oder den mittleren Tangentialdruck für die betrachtete Diagrammhälfte. Jede andere Ordinate ergibt, mit der Basis 12—24 multipliziert, den Inhalt der Fläche an, welche von dieser Ordinate, der zugehörigen Abscisse und dem darüberliegenden Kurvenstück begrenzt wird.

deuten, welche aus der Beziehung $\operatorname{tg} \varepsilon_n = \frac{B'_n}{A'_n}$ gefunden werden. [32])

A'_n und B'_n sind die Koeffizienten der kombinierten Reihe $(T - W)$.

Nach diesem Verfahren ist die Analyse von Tangentialdruckdiagrammen schon mehrfach ausgeführt worden.[33])

Man kann durch Berücksichtigung einer genügenden Zahl von Gliedern in der Reihe eine grosse Annäherung an den wirklichen Verlauf der Tangentialdrucke erreichen. Jedoch ist für die weitere Verwendung der Reihe eine grosse Zahl von Gliedern sehr hinderlich. Begnügt man sich mit weniger Gliedern, so macht man die Erfahrung, dass die Annäherung eine unzureichende wird und zwar umsomehr, je stärker sich die Schwankungen eines Tangentialdruckdiagrammes über den mittleren Druck an einer Stelle zusammendrängen d. h. je ausgeprägter die Spitzen sind, welche das Diagramm aufweist. Das hat darin seinen Grund, dass die ersten Glieder der *Fourier*schen Reihe die Spitzen der Schwankungen stark abrunden und dass die sin- und cos-Kurven erst an einer späteren Stelle der Reihe gewissermassen in die Spitzen des Tangentialdruckdiagrammes eindringen.

Für dynamische Untersuchungen kommt es aber in erster Linie darauf an, dass die charakteristischen Schwankungen zum Ausdruck kommen, insbesondere dass die Maxima und Minima in bezug auf ihre Lage im Diagramm nicht wesentlich verschoben werden. Das erreicht man dadurch, dass man die Koeffizientenbestimmung in

---

[32]) Der Phasenwinkel kann zwei Werte annehmen, die um π verschieden sind; welcher von beiden in Betracht kommt, ist leicht durch Auflösung der Funktion $\mathfrak{A}_n \cos n (\varphi + \varepsilon_n)$ zu erkennen.

[33]) s. *Lorenz*, Dynamik der Kurbelgetriebe, S. 91. — *Frahm*, Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in Wellenleitungen von Schiffsmaschinen. Z. d. V. d. I. 1902, S. 801. — *Macalpine*, Analysis of the inertia forces of the moving parts of an engine, Engineering 1897, Bd. 64, S. 543. — Die Bestimmung der Konstanten mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ist ausgeführt worden von *Boucherot*, Bulletin de la Société internationale des Electriciens 1901, S. 534. — *Runge*, Ueber die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Funktionen in Sinuswellen. Zeitschr. f. Mathem. u. Physik 1903, S. 443.

einer von dem obigen Verfahren abweichenden Weise vornimmt, nämlich derart, dass sich der durch die Reihe festgelegte Verlauf der Drehkraft in charakteristischen Punkten den wirklichen Schwankungen genau anschliesst, während zwischen diesen Punkten allerdings grössere oder geringere Abweichungen stattfinden. Soll z. B. nebenstehender Kraftverlauf von T in Fig. 3 durch eine Reihe

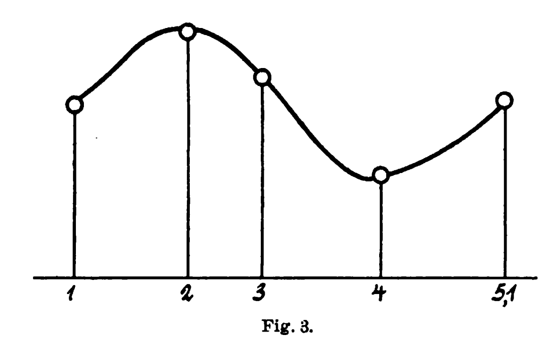


Fig. 3.

einfacher Grundschwankungen ersetzt werden von der Form:

$$T = T_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots$$
$$+ b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi +,$$

so erhält man wegen der Forderung, dass sich T in den Punkten 1, 2, 3, 4 dem wirklichen Verlaufe genau anschliessen, dass also die Ersatzkurve durch die genannten Punkte gehen soll, vier bestimmte Werte für T und damit hat man zunächst vier Gleichungen zur Bestimmung der fünf Koeffizienten. Ausserdem liefert die Bedingung, dass die durch die Reihe dargestellte Kurve die gleiche Fläche einschliessen soll wie die gegebene Kurve, die fünfte Gleichung. Dieses Verfahren hat gegenüber dem oben erwähnten den Vorteil, dass nur *eine* graphische Integration auszuführen ist und dass man mit einer geringeren Zahl von Gliedern der Reihe doch eine befriedigende Annäherung an den tatsächlichen Kraftverlauf erhält.

Bei Mehrkurbelmaschinen wird man nicht das resultierende Tangentialdruckdiagramm analysieren, sondern die Diagramme der einzelnen Zylinder. Die für die letzteren erhaltenen Reihen sind alsdann unter Einführung von Pha-

senwinkeln, welche den Kurbelversetzungen entsprechen, zu summieren und ergeben damit die Reihe des resultierenden Tangentialdruckes.

Wie schon oben bemerkt, ist für die Entscheidung dynamischer Fragen bei Kraftmaschinen eine genaue Analyse des Tangentialdruckdiagramms von Bedeutung, insbesondere wo es sich um die Beanspruchung der elastischen Getriebeteile durch den Tangentialdruck handelt. Die durch die Schwankungen des Tangentialdrucks in den Triebwerksteilen erzwungenen Schwingungen können die dadurch gleichzeitig geweckten Eigenschwingungen der Teile im Falle der Resonanz, d. h. der Uebereinstimmung der Periode beider, erheblich verstärken und dadurch die Beanspruchungen vergrössern. In ähnlicher Weise treten diese Erscheinungen auf bei parallel geschalteten Wechselstrommaschinen, deren übereinstimmende Bewegung durch die synchronisierende Kraft, in ihrer Eigenschaft der elastischen Kraft ähnlich, erzwungen wird. *Rosenberg* hat in einem beachtenswerten Aufsatze[34]) darauf hingewiesen, dass hauptsächlich durch die Schwingungen des Drehmomentes mit der längsten Dauer der Parallelbetrieb gefährdet werden kann. Darauf wird im letzten Abschnitt noch näher eingegangen werden.

B. Kinetostatischer Teil.

Die Reaktionen des Kurbelgetriebes.

Im folgenden soll untersucht werden, welche Drucke die das bewegte Getriebe stützenden Teile, die Lager und Führungen unter Einwirkung der äusseren und der aus der Bewegung entstehenden Kräfte erleiden. Das dabei eingeschlagene Verfahren kann auch ohne weiteres auf jede Stelle des Getriebes zur Bestimmung der dort herrschenden Spannungen angewendet werden. Führt man z. B. einen Schnitt durch die Lenkstange, so erhält man in den an der Schnittstelle ermittelten Reaktionen die dort auf-

[34]) Z. d. V. d. I. 1904, S. 793.

tretenden Spannungen. Mit Rücksicht auf die statische Beanspruchung der Triebwerksteile genügt die Ermittlung der Grenzwerte dieser Reaktionen und Spannungen. Ihre Schwankungen werden in der Festigkeitsberechnung durch einen dem Belastungsfall angemessenen grösseren Beanspruchungskoeffizienten berücksichtigt. Für die spezielle Untersuchung der dynamischen Vorgänge ist jedoch der Verlauf dieser Schwankungen während einer Umdrehung von Bedeutung. Dieser lässt sich in einfacher Weise unter Anwendung der *Lagrange*schen Methode angeben. Man hat zu diesem Zwecke die Bewegungsfreiheit des Systems derart zu erweitern, dass man in der Richtung der gesuchten Reaktionen virtuelle Verschiebungen unter dem Einfluss der äusseren Kräfte eintreten lässt. Die Bedingung, dass in Wirklichkeit diese Bewegungen durch die Reaktionen verhindert werden, gibt die Grösse der Reaktionskräfte. Auf diese Verwendung der *Lagrange*schen Methode zur Bestimmung der Reaktionen in Maschinenteilen hat besonders *Hertz* hingewiesen. [35])

Das Beispiel des einfachen Pendels (Fig. 4) soll das Verfahren näher erläutern: Hierbei hat die lebendige Kraft den einfachen Ausdruck $L = \frac{1}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 M$. Als äussere Kraft wirkt hier nur das Gewicht der Masse M, dessen Moment in bezug auf den Aufhängepunkt $= - M g l \sin \varphi$ ist. Die Bewegungsgleichung lautet demnach, da

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = o$$

$$\ddot{\varphi} l^2 M = - M g l \sin \varphi;$$

$$\text{daraus } \ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \sin \varphi.$$

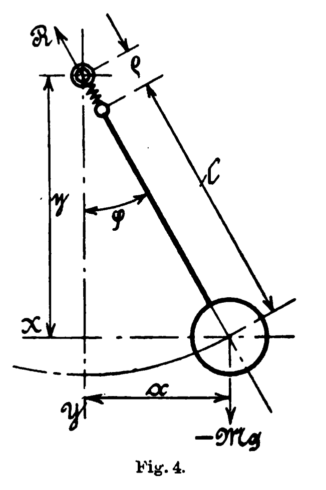


Fig. 4.

Will man nun die Spannung in der Pendelstange oder die Reaktion im Aufhängepunkt in der Stangenrichtung

[35]) s. *Heun*, Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik, 1902. Göschen, S. 87.

bestimmen, so lässt man die Stange ausser ihrer Drehbewegung um den Aufhängepunkt noch eine Verlängerung ρ in der Stangenrichtung ausführen und bestimmt für dieses so erweiterte System die lebendige Kraft. Die Geschwindigkeitskomponenten in den bezeichneten Achsrichtungen sind hierfür

$$\frac{dx}{dt} = (l + \rho) \cos \varphi \, \dot{\varphi} + \dot{\rho} \sin \varphi$$

und
$$\frac{dy}{dt} = -(l + \rho) \sin \varphi \, \dot{\varphi} + \dot{\rho} \cos \varphi$$

folglich

$$L = \frac{1}{2} M \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} M \left[(l + \rho)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 \right]$$

Die Koordinate, nach welcher die Differentiationen von L vorzunehmen sind, ist in vorliegendem Falle ρ. Als äussere Kräfte wirken jetzt die Reaktion R und die Gewichtskomponente in der Stangenrichtung; ihre Arbeit ist bei der Verschiebung $\delta \rho = (M g \cos \varphi + R) \, \delta \rho$.

Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = M \left[\ddot{\rho} - (l + \rho) \, \dot{\varphi}^2 \right] = M g \cos \varphi + R$$

Wenn die Reaktion die Bewegung in der Stangenrichtung verhindert — das ist der Fall für eine unelastische Pendelstange — so ist $\ddot{\rho}$ und $\rho = o$ zu setzen. Damit erhält man

$$R = - \left[M l \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + M g \cos \varphi \right]$$

d. h. die Reaktion im Aufhängepunkt in Richtung der Pendelstange ist gleich der Zentrifugalkraft des Pendelgewichts + Gewichtskomponente und ist diesen Kräften entgegengesetzt gerichtet, ein Resultat, das man in diesem einfachen Falle ohne weiteres hätte angeben können. Die Grösse der Geschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ist der Bewegungsgleichung für das ursprüngliche System zu entnehmen.[36])

---

[36]) Das Verfahren lässt sich aber noch weiter verwenden, wenn auch die Elastizität der Pendelstange berücksichtigt werden soll. Für die elastische Stange ist ρ nicht $= o$; es kann unter

Es sollen nun im folgenden speziell die Reaktionen im Kurbellager und in der Kreuzkopfführung aufgesucht werden.

a) Reaktionen im Kurbellager.

Zum Zwecke der Bestimmung dieser Reaktionen und zwar in den zwei Richtungen X und Y (Fig. 5) denken wir uns

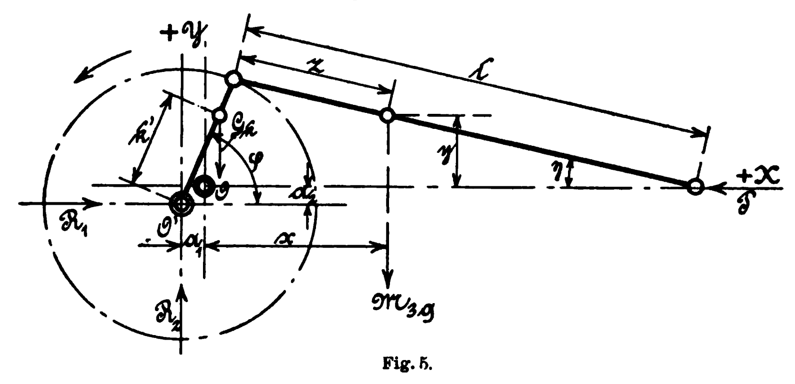


Fig. 5.

das Getriebe im Kurbellager nicht mehr fest gestützt, sondern von der Welle gelöst und die Kurbel in der Ebene

---

der Voraussetzung der Proportionalität zwischen Spannungen und Dehnungen der Reaktionskraft R proportional gesetzt werden. Setzt man $R = \rho \, . \, C$, wobei $C = \frac{E \, . \, F}{l}$ (E = Elastizitäts-Modul, F = Stangenquerschnitt) in die Bewegungsgleichung des erweiterten Systems ein, so erhält man:

$$M\,[\ddot{\rho} - (l + \rho)\,\dot{\rho}^2] - \rho\, C = M g \cos \varphi;$$

zusammen mit der Bewegungsgleichung des ursprünglichen Systems, die modifiziert wird zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\,\dot{\varphi}\dot{\rho}}{(l + \rho)} = \frac{g \, . \, l}{(l + \rho)^2} \sin \varphi$$

beschreibt diese Gleichung die Bewegung des Endpunktes der elastischen Pendelstange. Die Bewegung dieses Systems, nun eines Systems mit zwei Freiheitsgraden, ist eine resultierende aus den Pendelschwingungen und den Longitudinalschwingungen der Stange. Die Lösung der Gleichung ist aus der Schwingungslehre bekannt.

Hiermit gewinnt man einen Einblick in die dynamischen Beanspruchungen bewegter, elastischer Glieder von Mechanismen, so z. B. beim Kurbelgetriebe durch Ermittlung etwa der Transversalschwingungen der sich verbiegenden bezw. ausknickenden Lenkstange oder der Torsionsschwingungen der Welle usw.

frei beweglich. Unter dem Einfluss der äusseren Kraft P und der Gewichte der Triebwerksteile gelange das Wellenmittel aus der Lage 0 nach $0'$ mit den Abständen a_1 und a_2 vom Wellenmittel 0. Dadurch ist die Bewegungsfreiheit des Getriebes nach zwei Richtungen erweitert. Die Bewegungsgleichung dafür erfordert zunächst die Aufstellung des Ausdrucks für die lebendige Kraft des um zwei Freiheitsgrade erweiterten Systems. Wir betrachten wieder bloss die Lenkstange in der früher festgesetzten Belastungsweise, jedoch ist jetzt unter M_1 lediglich die auf den Kurbelzapfen reduzierte Masse der Kurbel zu verstehen, da nach unserer Voraussetzung die übrigen rotierenden Teile von dem Getriebe abgetrennt angenommen werden.

Die Koordinaten eines Lenkstangenpunktes im Abstande z vom Kurbelzapfen sind mit bezug auf das Koordinatensystem durch das ursprüngliche Wellenmittel:

$$x = r \cos \varphi + z \cos \eta - a_1$$

und
$$y = r \sin \varphi - z \sin \eta - a_2,$$

somit die Geschwindigkeitskomponenten in den bezeichneten Richtungen

$$\frac{dx}{dt} = - \dot{\varphi} \,.\, r \sin \varphi - z \sin \eta \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \dot{\varphi} + \frac{d\eta}{da_2} \,.\, \dot{a}_2\right) - \dot{a}_1$$

und

$$\frac{dy}{dt} = \dot{\varphi} \,.\, r \cos \varphi - z \cos \eta \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \dot{\varphi} - \frac{d\eta}{da_2} \dot{a}_2\right) - \dot{a}_2.$$

Hiermit ergibt sich die lebendige Kraft des erweiterten Systems zu

$$L = \frac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2} \Sigma m \left[\dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2 + r^2 \dot{\varphi}^2\right.$$

$$+ z^2 \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \dot{\varphi} + \frac{d\eta}{da_2} \dot{a}_2\right)^2 + 2 r \dot{\varphi} (\dot{a}_1 \sin \varphi - \dot{a}_2 \cos \varphi)$$

$$- \Big\{ 2 r z \dot{\varphi} \cos (\varphi + \eta) - 2 z (\dot{a}_1 \sin \eta$$

$$+ \dot{a}_2 \cos \eta) \Big\} \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \dot{\varphi} + \frac{d\eta}{da_2} \dot{a}_2\right).$$

Man kann sich das Wellenmittel O in die neue Lage O' gebracht denken durch Horizontalverschiebung des ganzen Systems um die Strecke a_1 und alsdann durch eine senkrechte Verschiebung a_2. Bei der wagerechten Verschiebung a_1 wird der Neigungswinkel der Lenkstange η nicht geändert, d. h. $\frac{d\eta}{da_1} = o.$

In den Ausdruck für den geometrischen Zusammenhang des Getriebes tritt in seiner erweiterten Form noch die Variable a_2.

Es ist $r \sin \varphi - a_2 = l \sin \eta$; daraus durch Differentiation nach a_2: $\frac{d\eta}{da_2} = -\frac{1}{l \cos \eta}$ oder mit der früheren Annäherung $\cos \eta = 1$: $\frac{d\eta}{da_2} = -\frac{1}{l}$. Werden schon jetzt in den Ausdruck für die lebendige Kraft die Näherungswerte für $\frac{d\eta}{d\varphi}$ und $\cos(\varphi + \eta)$ eingeführt, welche dieselben sind, wie die auf S. 16 angegebenen,[37] so wird

$$L = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{2}\left[\dot{a}_1^{\,2} + \dot{a}_2^{\,2} + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2 r \dot{\varphi} (\dot{a}_1 \sin \varphi - \dot{a}_2 \cos \varphi)\right] - (M_2 + a M_3)\left[r \dot{\varphi} (\cos \varphi - \lambda \sin^2 \varphi) - (\dot{a}_1 \lambda \sin \varphi + \dot{a}_2)\right](r \cos \varphi \dot{\varphi} - \dot{a}_2) + \frac{M_2 + b M_3}{2}\left[r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi - 2 r \dot{\varphi} \dot{a}_2 \cos \varphi + \dot{a}_2^{\,2}\right] \qquad 2a)$$

Entsprechend den drei Freiheitsgraden des erweiterten Systems ist die Aufstellung von drei Bewegungsgleichungen erforderlich:

---

[37]) Eine nachträgliche Prüfung hat ergeben, dass in dem Ausdruck für die lebendige Kraft auf S. 14 die Annäherung $\cos \eta = 1$ schon vor Ausführung der Differentiationen hätte gemacht werden können. Es ist jedoch im voraus nicht zu übersehen, ob dadurch nicht Glieder von der Differentiation ausgeschlossen werden, deren Bedeutung erst später hervortritt. Mit Rücksicht darauf ist es unterlassen worden, an der früheren Stelle den Ausdruck für die lebendige Kraft vor der Differentiation zu vereinfachen.

Die erste für die Drehung um den Winkel φ geht aus der Bearbeitung von Gleichung 2a) hervor, wenn dabei die virtuellen Verschiebungen a_1 und $a_2 = o$ gesetzt werden. Die zweite und dritte beschreiben die virtuelle Bewegung des Wellenmittels in den Achsrichtungen; die sog. Koordinaten sind hier die Verschiebungen a_1 und a_2. Letztere Gleichungen lauten daher

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial a_1} = Q_{a_1} + R_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial a_2} = Q_{a_2} + R_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III)}$$

Auf die rechten Seiten dieser Gleichungen tritt zunächst, da es sich um Verschiebungen in den Richtungen X und Y handelt, die Summe der Komponenten Q_{a_1} und Q_{a_2}, welche die äusseren Kräfte in den beiden Achsrichtungen aufweisen. Das Vorzeichen dieser Kräfte erhält man am sichersten wieder unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten:

$$Q_{a_1} \,.\, \delta a_1 = \Sigma K_1 \,\delta x \text{ und } Q_{a_2} \,\delta a_2 = \Sigma K_2 \,\delta y,$$

wenn K_1 und K_2 die Komponenten der äusseren Kräfte in den Achsen X und Y mit dem in Fig. 5 bezeichneten Richtungssinn bedeuten.

Mit den Werten für x und y auf Seite 36 ist

1. für den Schwerpunkt des Kurbelarmes

$$\delta x = -\,\delta a_1; \quad \delta y = -\,\delta a_2$$
$$K_1 = o; \qquad K_2 = -\,G_k,$$

2. für den Schwerpunkt der Lenkstange

$$\delta x = -\,\delta a_1; \quad \delta y = -\,\delta a_2\,(1 - a); \quad a = \frac{z'_0}{l}$$
$$K_1 = o; \qquad K_2 = -\,M_3\,g,$$

3. für den Kreuzkopf

$$\delta x = -\,\delta a_1; \quad \delta y = o,$$
$$K_1 = -\,P; \qquad K_2 = -\,M_2\,g.$$

Somit ergibt sich

$$Q_{a_1} = +\,P; \quad Q_{a_2} = G_k + M_3\,g\,(1 - a).$$

Eine Verlegung der Kräfte und Massen, wie sie bei der Betrachtung der reinen Bewegungsverhältnisse des Getriebes zulässig war, darf nach der Teilung des Systems zur Bestimmung der Spannungen in demselben nicht mehr stattfinden. Der Widerstand fällt heraus, wenn er an der abgetrennten Welle, nicht aber wenn er an der verlängerten Kolbenstange angreift. Die Kolbenkraft wirkt am Kreuzkopf und die Gewichte der bewegten Teile greifen in deren Schwerpunkten an, wo ihre Massen hinsichtlich ihrer statischen Wirkung konzentriert werden dürfen. Zu diesen äusseren Kräften treten noch die stützenden Reaktionen im Kurbellager R_1 und R_2.

Werden nun die partiellen Differentiationen von L nach a_1 und a_2 ausgeführt, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$(M_1 + M_2 + M_3)\left[\ddot{a}_1 + r\,\ddot{\varphi} \sin\varphi + r\,\dot{\varphi}^2 \cos\varphi\right]$$

$$+ (M_2 + a\,M_3)\left[r\,\dot{\varphi}^2 \lambda \cos 2\,\varphi + r\,\frac{\dot{\varphi}\,\lambda}{2} \sin 2\,\varphi\right.$$

$$\left. - \ddot{a}_2\,\lambda \sin\varphi - \dot{a}_2\,\dot{\varphi}\,\lambda \cos\varphi\right] = Q_{a1} + R_1 \quad . \quad . \quad \text{IIa)}$$

und

$$(M_1 + M_2 + M_3)\left[\ddot{a}_2 - r\,\ddot{\varphi} \cos\varphi + r\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right]$$

$$+ (M_2 + a\,M_3)\left[r\,\ddot{\varphi}\,(2\cos\varphi - \lambda \sin^2\varphi)\right.$$

$$- r\,\dot{\varphi}^2\,(2\sin\varphi - \lambda \sin 2\,\varphi) - \ddot{a}_1\,\lambda \sin\varphi - 2\,\ddot{a}_2$$

$$\left. - \dot{a}_1\,\dot{\varphi}\,\lambda \cos\varphi\right] - (M_2 + b\,M_3)\,(r\,\ddot{\varphi} \cos\varphi$$

$$- r\,\dot{\varphi}^2 \sin\ddot{\varphi} - a_2) = Q_{a2} + R_2 \ldots \ldots \quad \text{IIIa)}$$

Da nun für das starr gelagerte Getriebe die Verschiebungen tatsächlich nicht zustande kommen, so erhält man mit a_1, a_2 und deren Ableitungen $= o$, die Grösse der Reaktionen

$$R_1 = r\ddot{\varphi}\left[(M_1 + M_2 + M_3)\sin\varphi + (M_2 + a\,M_3)\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right]$$

$$+ r\dot{\varphi}^2\left[(M_1 + M_2 + M_3)\cos\varphi + (M_2 + a M_3)\,\lambda\cos 2\varphi\right]$$

$$- Q_{a_1}.$$

$$R_2 = - r\ddot{\varphi}\left[\Big(M_1 + (1 - 2a + b)\,M_3\Big)\cos\varphi\right.$$

$$\left. - \frac{M_2 + a\,M_3}{2}\,\lambda\cos 2\varphi + \frac{M_2 + a\,M_3}{2}\,\lambda\right] + r\dot{\varphi}^2\Big[M_1$$

$$\left. + (1 - 2a + b)\,M_3\Big)\sin\varphi - \frac{M_2 + a\,M_3}{2}\,\lambda\sin 2\varphi\right]$$

$$- Q_{a_2}.$$

Die Grössen der Geschwindigkeit und Beschleunigung $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$ sind der Bewegungsgleichung des ursprünglichen Getriebes zu entnehmen. Alsdann können die Reaktionen des Lagers in den beiden Achsrichtungen für jede Stellung der Kurbel angegeben werden. Die Betrachtung der Ausdrücke der Reaktionen ergibt eine einfache mechanische Interpretation dieser Werte.

Darnach rühren die Reaktionen her einmal unmittelbar von den äusseren Kräften Q_{a_1} und Q_{a_2} und dann von den Kräften, welche aus der von den äusseren Kräften verursachten Bewegung entstehen. Letztere erscheinen in der Form von tangentialen Trägheitskräften (Glieder mit $\ddot{\varphi}$) und von radialen oder Zentrifugalkräften (Glieder mit $\dot{\varphi}^2$).

Ausgleich der von den bewegten Massen herrührenden Reaktionen.

Die vom Kolbendruck herrührenden Reaktionen finden ihren Ausgleich durch Vermittlung des Maschinenrahmens in den gleich grossen Drucken auf die Zylinderdeckel. Die sogen. freien Massenkräfte dagegen suchen die Maschine auf ihrem Fundament zu verschieben und zu verdrehen. Bei grossen Geschwindigkeiten wird es notwendig, dieses durch Ausgleich der Massenkräfte zu verhin-

dern. Vollkommen würde ein Ausgleich der die Ortsveränderung der Maschine verursachenden Kräfte und Momente nur durch die Anordnung von Massen möglich sein, welche eine entgegengesetzte und nach demselben Gesetze veränderliche Bewegung haben, wie die Massen des Getriebes, so dass der Schwerpunkt der ganzen bewegten Masse seine Lage nicht ändert. Man begnügt sich indessen für den Ausgleich mit der Anbringung rein rotierender Massen im Kurbelkreis, wenn auch, wie bei einer liegenden Maschine, die Horizontalkomponente der Bewegung einer solchen Masse nicht genau der Bewegung des Getriebes entspricht und durch die Vertikalkomponente neue Massenkräfte erzeugt werden, welche aber den senkrechten Lagerdruck in einer nicht schädlichen Weise beeinflussen. Letzteres gilt auch bei stehenden Maschinen für die freien Massenkräfte in Richtung der Kolbenbewegung; würde man hier Ausgleichsmassen anwenden, so würden die viel gefährlicheren horizontalen Kräfte entstehen. Man könnte damit zwar gleichzeitig einen für die Gleichförmigkeit des Ganges nützlichen Gewichtsausgleich der Getriebeteile erzielen, was aber besser durch Verschiedenheit der Füllung auf der Kurbel- und Deckelseite erreicht wird. — Von dem Ausgleich der Massenkräfte bei Mehrkurbelmaschinen ist bei der Besprechung des Ausgleichs der Gesamtreaktionen später die Rede.

b) Reaktion der Kreuzkopfführung.

In der Kreuzkopfführung tritt eine Reaktion nur in einer Richtung senkrecht zur Kolbenbewegung auf, da in der Kolbenstangenrichtung keine Stützung stattfindet. Der Druck auf die Gleitbahn wird, abgesehen von den Gewichten, durch die Lenkstange in ihrer Schräglage erzeugt. Fasst die Lenkstange den Kreuzkopf nicht in dessen Mittelpunkt, so tritt noch eine Verdrehung der Führung ein, von welcher aber im folgenden abgesehen werde.

Zur Bestimmung der Reaktion wird eine Trennung des Fundamentrahmens durch den in Fig. 6 angedeuteten Schnitt angenommen, so dass sich die Führung gegenüber dem festen Kurbellager um einen Betrag u senken kann. Die lebendige Kraft des so in seiner Bewegung erweiterten Getriebes ist

$$L = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,[(M_1 + M_2 + M_3)\,r^2] + \frac{l^2}{2}\,\dot{\eta}'^{\,2}\,(M_2 + b\,M_3)$$
$$-\,l\,r\,\dot{\varphi}\,\dot{\eta}'\cos(\varphi + \eta')\,(M_2 + a\,M_3),$$

da die Koordinaten eines Schubstangenpunktes in bezug auf $X\,Y$

$$x = r\cos\varphi + z\cos\eta' \text{ und } y = r\sin\varphi - z\sin\eta'$$

sind.

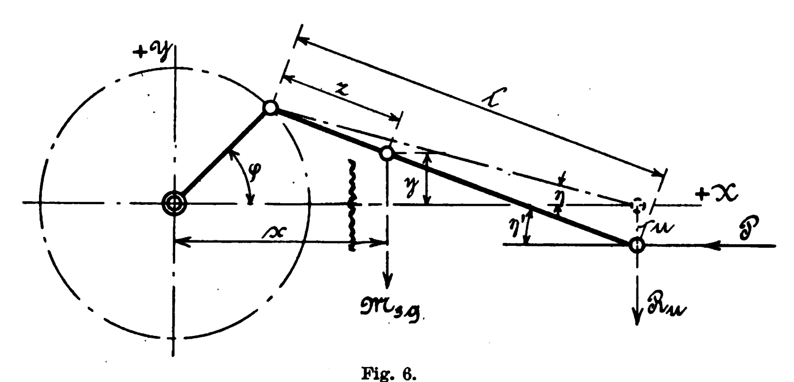


Fig. 6.

Die Konnexbedingung des erweiterten Getriebes lautet

$$r\sin\varphi = l\sin\eta' - u$$

und daraus folgt

$$\dot{\eta}' = \lambda\cos\varphi\,\dot{\varphi} + \frac{\dot{u}}{l} \text{ und } \cos(\varphi + \eta') = \cos\varphi$$
$$-\,\lambda\sin^2\varphi - \frac{u}{l}\sin\varphi$$

wenn, wie früher die Annäherung $\cos\eta = 1 \sim \cdot \cos\eta'$ eingeführt wird.

Hiermit wird

$$L = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,(M_1 + M_2 + M_3)\,r^2$$
$$+\,\frac{M_2 + b\,M_3}{2}\,(r^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + 2\,r\,\dot{\varphi}\,\dot{u}\cos\varphi + \dot{u}^2)$$
$$-\,(M_2 + a\,M_3)\,l\,.\,r\,\dot{\varphi}\left(\lambda\cos\varphi\,\dot{\varphi} + \frac{\dot{u}}{l}\right)$$
$$\left(\cos\varphi - \lambda\sin^2\varphi - \frac{u}{l}\sin\varphi\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \text{2b)}$$

Die Ausführung der Differentiation nach u ergibt die Bewegungsgleichung für den Kreuzkopf; für $u = o$ erhält man daraus die Grösse der Reaktion

$$R_u = r\ddot{\varphi}\left[\frac{M_2 + a\,M_3}{2}\lambda - (a-b)\,M_3 \cos\varphi \right.$$
$$\left. -\left(\frac{M_2 + a\,M_3}{2}\right)\lambda \cos 2\varphi\right] + r\dot{\varphi}^2\left[(a-b)\,M_3 \sin\varphi \right.$$
$$\left. + (M_2 + a\,M_3)\frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi\right] - Q_u.$$

Die Summe der äusseren Kräfte Q_u erhält man wieder unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten:

$$\Sigma K_1\,\delta x + \Sigma K_2\,\delta y = Q_u\,.\,\delta u.$$

Führen wir wieder wie auf S. 25 einen Neigungswinkel der Gleitbahn gegen die Horizontale $= \gamma$ ein, so gilt für den Kreuzkopfzapfen:

$$x = r\cos(\varphi + \gamma) + l\cos(\eta' - \gamma)$$

und
$$y = r\sin(\varphi + \gamma) - l\sin(\eta' - \gamma)$$

daraus $\delta x = -\operatorname{tg}\eta\,\delta u$, wenn $\operatorname{tg}\eta' = \operatorname{tg}\eta$ gesetzt wird.

Die einzige Horizontalkraft in der X-Richtung ist der Kolbendruck $- P = K_1$; senkrecht $K_2 = - M_2\,g$[38]) mit $\delta y = (-\cos\gamma - \sin\gamma\operatorname{tg}\eta)\,\delta u$ für die Lenkstange: im Schwerpunkt derselben greift die Schwerkraft $- M_3\,g = K_2$ an, $K_1 = o$.

Hierfür ist

$$\delta y = \left(-\frac{z'_0}{l}\cos\gamma - \frac{z'_0}{l}\sin\gamma\operatorname{tg}\eta\right)\delta u$$
$$= -a(\cos\gamma + \sin\gamma\operatorname{tg}\eta)\,\delta u.$$

Sonach ist

$$Q = P\operatorname{tg}\eta + M_2\,g(\cos\gamma + \sin\gamma\operatorname{tg}\eta)$$
$$+ M_3\,g\,a(\cos\gamma + \sin\gamma\operatorname{tg}\eta)$$

---

[38]) Wieviel von dem Gewicht der hin- und hergehenden Teile bei liegenden Maschinen durch den Kreuzkopf oder durch den Zylinder getragen wird, müsste durch eine besondere Untersuchung festgestellt werden.

für liegende Maschinen $\gamma = 0^0$

$$Q_l = P \operatorname{tg} \eta + M_2 g + M_3 g \cdot a,$$

für stehende Maschinen $\gamma = 90^0$

$$Q_{st} = P \operatorname{tg} \eta + M_2 g \operatorname{tg} \eta + M_3 g a \operatorname{tg} \eta$$
$$= (P + M_2 g + M_3 g a) \operatorname{tg} \eta$$

Dieses Resultat hätte man in dem vorliegenden einfachen Falle auch direkt anschreiben können. Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten gibt aber, besonders bei komplizierterer geometrischer Konfiguration des Getriebes, eine sichere Prüfung für die Richtigkeit der Vorzeichen.

Die aus der Bewegung entstehenden Kräfte, welche zur Reaktion R_u einen Beitrag liefern, rühren her von den Trägheitskräften der Lenkstange senkrecht zu ihrer Achse, dann auch von den Trägheitskräften der Lenkstange und der Masse M_2 in Richtung der Kolbenbewegung, welche infolge der Schräglage der Stange eine Komponente senkrecht zur Gleitbahn liefern.

Das im Vorstehenden angewandte Verfahren ermöglichte die *getrennte* Ermittlung der Einzelreaktionen im Kurbellager und im Kreuzkopf. Die Horizontalreaktion im Kurbellager hätte auch leicht unter Anwendung des *d'Alembert*schen Prinzips angegeben werden können; sie setzt sich aus dem Kolbendruck und dem horizontalen Beschleunigungsdruck des Gestänges zusammen. Dagegen lässt sich die Vertikalreaktion im Kurbellager und im Kreuzkopf, wohl in ihrer Summe, aber nicht in den Einzelwerten auf diese Weise ermitteln; sie ist gleich der Vertikalkomponente des Kolbendruckes und der senkrechten Beschleunigungskraft des Gestänges. Die Vertikalkomponente des Kolbendruckes hat am Kurbellager und am Kreuzkopf dieselbe Grösse und entgegengesetzte Richtung. Für die Verteilung der vertikalen Beschleunigungskraft des Gestänges auf das Kurbellager und den Kreuzkopfzapfen gibt *Lorenz* [39]) an, dass man die auf diese Punkte entfallenden Einzelreaktionen durch Anwendung des Satzes von den statischen Momenten finden könne. Das würde aber eine Massenverlegung in einen Punkt des Getriebes zur Voraussetzung haben, was mit einer konstanten re-

---

[39]) Dynamik der Kurbelgetriebe, S. 20.

duzierten Masse unmöglich ist. Die Anwendung des Momentensatzes muss daher auf andere Werte der Einzelreaktionen führen, als wir sie oben gefunden haben. Uebrigens ist der Unterschied nicht sehr gross und könnte allein die Anwendung der *Lagrange*schen Methode in diesem Falle noch nicht rechtfertigen, wenn nicht gerade die Einfachheit des Kurbelgetriebes besonders dafür geeignet erschiene, die Leistungsfähigkeit der *Lagrange*schen Mechanik in der dargelegten Richtung zu erkennen und sich mit derselben vertraut zu machen.

Nebenbei sei bemerkt, dass *Lorenz* die Unsicherheit seines vorgeschlagenen Weges gefühlt zu haben scheint, sonst wäre die Bemerkung, die er bei der Besprechung der Reaktionen hinzufügt, nicht recht verständlich, dass selbst bei völlig bekannten Werten der Massen und Geschwindigkeiten eine zahlenmässige Angabe der Einzelreaktionen unmöglich sei.

C. Beispiel.

Im folgenden soll für das Kurbelgetriebe einer einzylindrigen Dampfmaschine ein Zahlenbeispiel durchgerechnet werden. Es lassen sich dabei mehrere Fragen erörtern, über die man erst nach Angabe zahlenmässiger Grössen ein Urteil gewinnt. Hieran werden sich noch einzelne Bemerkungen anschliessen, die mit dem Kurbelgetriebe in Zusammenhang stehen.

Damit für das Zahlenbeispiel die Geschwindigkeitsschwankungen nicht zu klein ausfallen und ihr Einfluss auf das Drehmoment an der Kurbel und auf die Reaktionen überhaupt zu erkennen ist, erschien es zweckmässig, die Grösse der Schwungmasse gegenüber der Masse der hin- und hergehenden Teile, abweichend von normalen Verhältnissen, nicht zu sehr überwiegen zu lassen.

Es werde eine liegende Einzylindermaschine mit Kondensation zugrunde gelegt, welche bei 85 Umdrehungen i. d. Minute und einem absoluten Dampfdruck von 6 Atm. eine Nutzleistung von 300 PS aufweist. Ein Satz Indi-

katordiagramme der Kurbel- und Deckelseite liegt vor (Fig. 7). Die Gewichte der Triebwerksteile betragen:

Kolben 600 Dmr. mit Ringen und Mutter	300 kg,
Kolbenstange	130 „
Kreuzkopf mit Zapfen	370 „
Lenkstange, 3 m lang	660 „
Kurbel mit Zapfen	260 „

Der Kurbelradius r beträgt 0,6 m; der Schwerpunktsab-

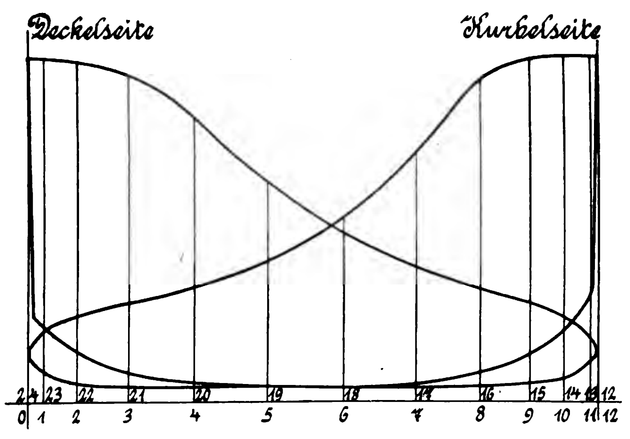


Fig. 7. Indikatordiagramm.
Druckmasstab 7,64 mm = 1 kg.

stand der Kurbel von der Wellenmitte $k' = 0{,}4$ m, das Verhältnis der Kurbel- zur Lenkstangenlänge $\lambda = \frac{1}{5}$.

Das Gewicht des Schwungrades, ferner der Welle, der Kurbel und sonstiger rotierender Teile betrage auf den Kurbelzapfen reduziert insgesamt 5000 kg.

Es ist daher $M_1 = 500$,
$M_2 = 80$,
$M_3 = 66$.

Nach der Tabelle auf S. 14 werde der Schwerpunktsabstand der Lenkstange vom Kurbelzapfen $z'_0 = 1{,}05$ m mit $a = 0{,}35$ und deren Trägheitsradius mit bezug auf den Kurbelzapfen $z' = 1{,}65$ m mit $b = 0{,}3$ angenommen.

Die lebendige Kraft des Triebwerks ist dann nach Gleichung 2)

$$L = 0{,}18\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 (593 + 10{,}3 \cos\varphi - 53 \cos 2\,\varphi$$

$$- 10{,}3 \cos 3\,\varphi).$$

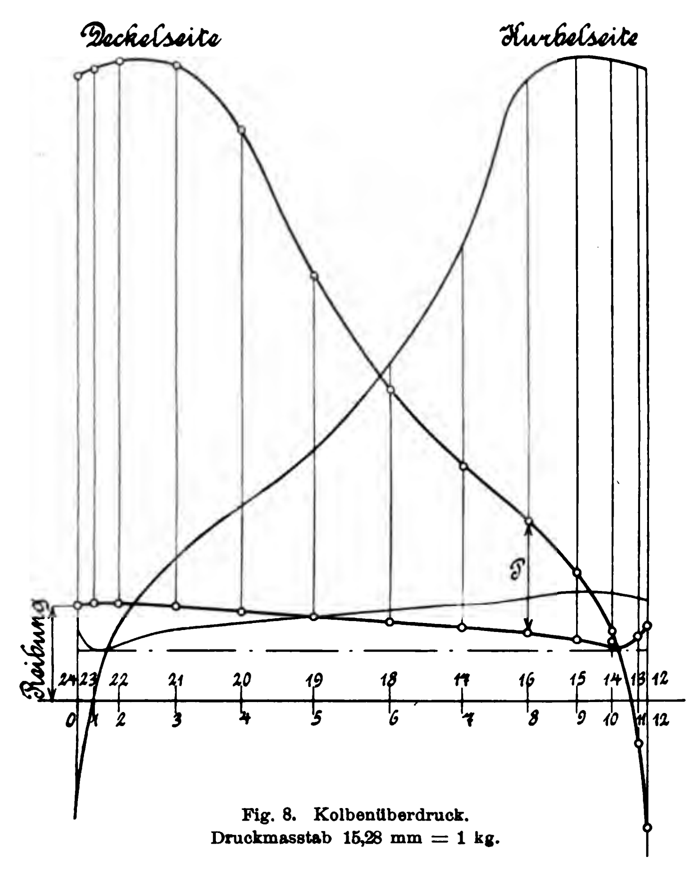


Fig. 8. Kolbenüberdruck.
Druckmasstab 15,28 mm = 1 kg.

Vernachlässigen wir noch die Glieder mit $\cos\varphi$ und . $\cos 3\,\varphi$ gegenüber dem konstanten Glied, so wird

$$L = 0{,}18\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 (593 - 53 \cos 2\,\varphi).$$

Die Bestimmung der Kurbelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ aus der Energiegleichung erfordert zunächst die Aufstellung des analytischen Ausdrucks für die äusseren Kräfte: für die Gewichte der Getriebeteile, den Dampfdruck und den Widerstand. Die Gewichte sind bekannte Grössen, der Widerstand soll zunächst, tangential im Kurbelkreis wirkend, während der Dauer einer Umdrehung konstant angenommen werden. Den Verlauf des Dampfdruckes geben die Indikatordiagramme der Kurbel- und Deckelseite. Um diesen Verlauf analytisch darzustellen, und zwar in Abhängigkeit vom Drehwinkel der Kurbel, bilden wir die Tangentialkomponente des Dampfdruckes P im Kurbelkreis mit Hilfe der Beziehung auf S. 27

$$T = P \frac{\sin(\varphi + \eta)}{\cos \eta}$$

unter Benutzung der Tabelle auf Seite 28 u. 29 oder in der in Fig. 9 angedeuteten Weise, nachdem wir zuvor den Betrag für die Reibung schätzungsweise in Abzug gebracht haben.[40]) Die so bestimmten Werte der Tangentialkomponente tragen wir auf der Basis des abgewickelten Kurbelkreises als Ordinaten auf und erhalten damit das weiterhin zu analalysierende Tangentialdruckdiagramm in Fig. 10.

Bei der harmonischen Analyse des Tangentialdruckdiagrammes, d. i. der Zerlegung desselben in einzelne Kraftschwingungen von bekannter Gesetzmässigkeit, mögen in der periodischen Reihe noch die Glieder mit 4 φ berücksichtigt werden. Der Tangentialdruck stellt sich hiernach dar durch die Reihe

$$T = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 3\varphi + A_4 \cos 4\varphi + B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + B_3 \sin 3\varphi + B_4 \sin 4\varphi$$ [41])

---

[40]) Streng genommen hätte die Bestimmung der Tangentialdrucke aus den Kolbendrucken auch unter Berücksichtigung der Abweichungen der Kräfte von den durch die Konfiguration des Getriebes bestimmten Richtungen, welche durch die Grösse des Reibungswinkels gegeben sind, zu geschehen. Im vorliegenden Fall begnügen wir uns jedoch, die Gesamtreibungsarbeit = 0,1 der indizierten Arbeit mit einem konstanten Betrag für Kolben, Stopfbüchse und Kreuzkopf zu 60 v. H. und mit einem vom Kolbendruck abhängigen Betrag für Kurbel- und Wellenzapfen zu 40 v. H. von der Kolbenkraft in Abzug zu bringen.

Die Koeffizienten dieser Reihe werden so bestimmt, dass der durch die Reihe dargestellte Verlauf des Tangentialdruckes in den Hauptpunkten die gleichen Ordinaten wie das vorliegende Diagramm zeigt. Als charakteristische Punkte sind zu

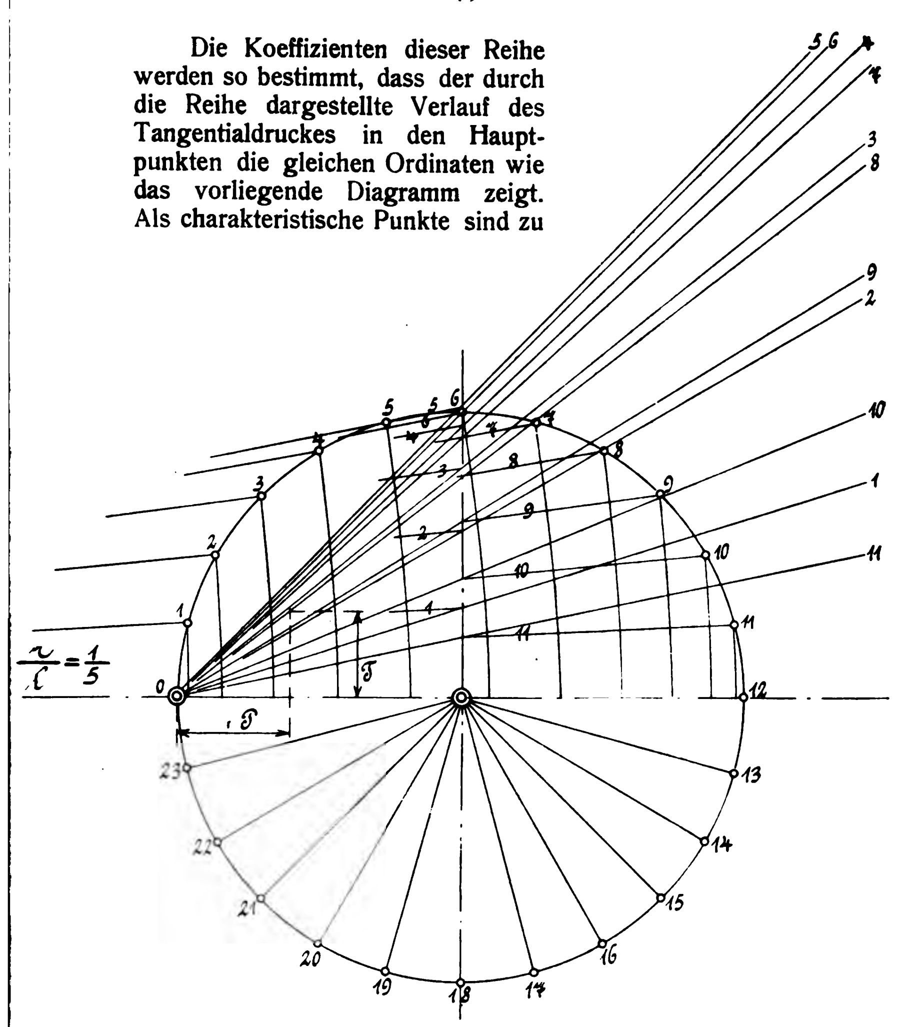


Fig. 9. Zur Bestimmung der Tangentialkomponente des Dampfdruckes.

$$T = P \frac{\sin(\varphi + \eta)}{\cos \eta}.$$

[41]) Sind die Diagramme für Hin- und Rückgang gleich, so verschwinden die Glieder mit ungeraden Koeffizienten; sie drücken also die Ungleichheiten beider Diagrammhälften aus, welche von der endlichen Schubstangenlänge und der Verschiedenheit der Füllungen herrühren.

betrachten die Werte des Tangentialdruckes in den Totlagen bei 0 und π, dessen Maxima bei $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ und Minima bei $\frac{11\pi}{12}$ und $\frac{23\pi}{12}$. Weiter wurden noch die Punkte $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ gewählt. — Das Tangentialdruckdiagramm erstreckt sich über eine volle Umdrehung, der abgewickelte Kurbelkreis ist in 24 gleiche Teile geteilt. — In den angegebenen 8 Punkten wird die Grösse des Tangentialdruckes dem Diagramm entnommen, womit für einen bestimmten Wert φ die Grösse T bekannt ist. Man kann daher zur Bestimmung der Koeffizienten mit Benutzung der im Anhang beigefügten Tabelle die 8 Gleichungen anschreiben:

$$T_1 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \quad \ldots \quad 1)$$

$$T_2 = A_0 + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} - A_3 - \frac{A_4}{2} + \frac{B_1}{2}\sqrt{3} + \frac{B_2}{2}\sqrt{3} - \frac{B_4}{2}\sqrt{3} = 11\,500 \quad \ldots \quad 2)$$

$$T_3 = A_0 - A_2 + A_4 + B_1 - B_3 = 5750 \quad \ldots \quad 3)$$

$$T_4 = A_0 - 0{,}966\, A_1 + \frac{A_2}{2}\sqrt{3} - \frac{A_3}{2}\sqrt{2} + \frac{A_4}{2} - 0{,}259\, B_1 - \frac{B_2}{2} + \frac{B_3}{2}\sqrt{2} - \frac{B_4}{2}\sqrt{3} = -700 \quad \ldots \quad 4)$$

$$T_5 = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 0 \quad \ldots \quad 5)$$

$$T_6 = A_0 - \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} + A_3 - \frac{A_4}{2} - \frac{B_1}{2}\sqrt{3} + \frac{B_2}{2}\sqrt{3} - \frac{B_4}{2}\sqrt{3} = 9500 \quad \ldots \quad 6)$$

$$T_7 = A_0 - A_2 + A_4 - B_1 + B_3 = 5750 \quad \ldots \quad 7)$$

$$T_8 = A_0 + 0{,}966\, A_1 + \frac{A_2}{2}\sqrt{3} + \frac{A_3}{2}\sqrt{2} + \frac{A_4}{2} + 0{,}259\, B_1 - \frac{B_2}{2} - \frac{B_3}{2}\sqrt{2} - \frac{B_4}{2}\sqrt{3} = 980 \quad \ldots \quad 8)$$

Ausserdem liefert die Forderung der Flächengleichheit mit dem gegebenen Diagramm den Wert von A_0 aus

$$F = \int_0^{2\pi} T\, d\varphi = A_0 \,.\, 2\pi,$$

da die periodischen Glieder bei der Integration von 0 bis 2π verschwinden. A_0 ist eben der mittlere Wert des Tangentialdruckes während einer Umdrehung $= 4200$ kg. Durch Zusammenfassen entsprechender Gleichungen, z. B. von 1 und 5, 2 und 6 usw., und durch Addition und Subtraktion derselben erhält man ohne Mühe die Koeffizienten

$$A_1 = 620,\; A_2 = -2870,\; A_3 = -620,\; A_4 = -1330,$$
$$B_1 = 520,\; B_2 = 4470,\; B_3 = 520,\; B_4 = -390.$$

Damit lautet die Reihe für den Tangentialdruck:

$$\begin{aligned} T = 4200 &+ 620 \cos\varphi - 2870 \cos 2\varphi \\ &- 620 \cos 3\varphi - 1330 \cos 4\varphi \\ &+ 520 \sin\varphi + 4470 \sin 2\varphi \\ &+ 520 \sin 3\varphi - 390 \sin 4\varphi, \end{aligned}$$

wofür man auch unter Einführung eines Phasenwinkels schreiben kann:

$$\begin{aligned} T = 4200 &+ 810 \cos(\varphi - 40^0) \\ &- 5320 \cos 2\,(\varphi + 28^3/_4{}^0) \\ &- 810 \cos 3\,(\varphi + 13^1/_8) \\ &- 1385 \cos 4\,(\varphi - 4^1/_8{}^0). \end{aligned}$$

Das unregelmässige Tangentialdruckdiagramm erscheint hiernach aufgelöst in einen konstanten Teil und in 4 Cosinusschwingungen, die in ihrer Phase gegeneinander verschoben sind. Die Annäherung an den wirklichen Verlauf ist, wie Fig. 10 zeigt, eine ausreichende; die Abweichungen beschränken sich auf Stellen von untergeordneter Bedeutung.

Der Widerstand soll unserer Voraussetzung nach konstant sein; im Beharrungszustand, der bei der ganzen Untersuchung betrachtet wird, ist er dann gleich dem mittleren Tangentialdruck $= 4200$ kg. Das Drehmoment, welches die Gewichte der Triebwerksteile liefern, ist

$$-(G_k k' + M_3 g \,.\, r\,(1 - a)) \cos\varphi = -360 \cos\varphi.$$

Mithin ist das Moment der äusseren Kräfte

$$Q = 0{,}6\,(20 \cos \varphi - 2870 \cos 2\varphi - 620 \cos 3\varphi - 1330 \cos 4\varphi + 520 \sin \varphi + 4470 \sin 2\varphi + 520 \sin 3\varphi = 390 \sin 4\varphi)$$

und

$$\int_{0}^{\varphi} Q\, d\varphi = 1700 - 310 \cos \varphi - 1340 \cos 2\varphi - 100 \cos 3\varphi + 60 \cos 4\varphi - 860 \sin 2\varphi - 120 \sin 3\varphi - 200 \sin 4\varphi.$$

Aus der Energiegleichung folgt dann

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{L_0 + \int_0^{\varphi} Q\, d\varphi}{0{,}18\,(593 - 53 \cos 2\varphi)} = \frac{97\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 + \int_0^{\varphi} Q\, d\varphi}{105\,(1 - 0{,}09 \cos 2\varphi)}$$

Die Auflösung dieses Wertes ergibt mit der Annäherung

$$\frac{1}{1 - 0{,}09 \cos 2\varphi} = 1 + 0{,}09 \cos 2\varphi,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \underbrace{\left[0{,}925\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 + 15{,}5\right]}_{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_m^2} - 3{,}00 \cos \varphi$$

$$-\left(11{,}35 - 0{,}083\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2\right) \cos 2\varphi - 1{,}0 \cos 3\varphi - 8{,}2 \sin 2\varphi - 1{,}1 \sin 3\varphi - 2{,}3 \sin 4\varphi.$$

Die periodischen Glieder geben die Schwankungen der Geschwindigkeit während einer Umdrehung an, die konstanten Glieder werden dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit gleichgesetzt

$$= \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_m^2 = \left(\frac{\pi \,.\, n}{30}\right)^2 = 79{,}2.$$

Daraus bestimmt sich die Totpunktgeschwindigkeit

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 = \left[\left(\frac{\pi \cdot n}{30}\right)^2 - 15{,}5\right] \cdot \frac{1}{0{,}925} = 69{,}0$$

somit

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 79{,}2 - 3{,}0 \cos \varphi - 6{,}1 \cos 2\varphi - 1{,}0 \cos 3\varphi$$
$$- 8{,}2 \sin 2\varphi - 1{,}1 \sin 3\varphi - 2{,}3 \sin 4\varphi.$$

Bei grösserer Geschwindigkeit treten die Schwankungen derselben gegenüber dem konstanten Glied, der mittleren Geschwindigkeit, immer mehr zurück.

Die Winkelbeschleunigung im Kurbelkreis erhält man nun aus der Bewegungsgleichung durch Einsetzen des Wertes der Geschwindigkeit in dieselbe zu

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - 8{,}0 \cos 2\varphi - 1{,}7 \cos 3\varphi - 4{,}7 \cos 4\varphi$$
$$+ 2{,}2 \sin \varphi + 5{,}7 \sin 2\varphi - 0{,}4 \sin 3\varphi - 0{,}8 \sin 4\varphi.$$

Der Verlauf von $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ und $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ist in Fig. 11 und 12 auf der Basis des abgewickelten Kurbelkreises aufgetragen durch graphische Summierung der durch die einzelnen Glieder der Reihen dargestellten harmonischen Kurven. Man bringt zu diesem Zwecke die Reihen auf die auf S. 29 angegebene Form, in welcher dieselben nur Kosinusfunktionen enthalten, die dann, um die Phasenwinkel gegeneinander verschoben, in einfacher Weise aufgezeichnet werden können.

Aus der Kurve, welche das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit darstellt, lässt sich die Grösse des periodischen Ungleichförmigkeitsgrades bestimmen, welcher definiert ist durch

$$\delta = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max} - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\min}}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_m}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{88{,}9} - \sqrt{62{,}6}}{\sqrt{79{,}2}} = \sim \frac{1}{6}$$

Aus der Kurve der Geschwindigkeitsquadrate lässt sich auch leicht die Kurve der Geschwindigkeit selbst auftragen und daraus durch Integration der während einer Umdrehung zurückgelegte Weg des Kurbelzapfens bestimmen, wenn wieder Zeitabszissen statt der Kurbelwinkel als Basis der Geschwindigkeitskurve eingeführt werden. Die Wegkurve ist in denjenigen Fällen von Bedeutung, in welchen es auf das Voreilen bezw. Zurückbleiben in der Bewegung gegenüber einer mit konstanter oder variabler Geschwindigkeit umlaufenden Maschine ankommt. Zur Ausführung der Integration empfiehlt sich nachstehende *Newton*sche Integrationsformel, welche ein sehr genaues Ergebnis liefert, weil zur Bestimmung der Fläche eines Streifens immer vier bestimmte Ordinaten, nicht Mittelwerte derselben herangezogen werden. Werden die Ordinaten der Reihe nach mit y_0, y_1, y_2 usw., die von ihnen eingeschlossenen Flächenstreifen von der konstanten Breite b mit F_{0-1}, F_{1-2} . . . . F_{23-24}, so lautet die Formel für das erste Flächenstück

$$F_{0-1} = \frac{b}{24}(9\,y_0 + 19\,y_1 - 5\,y_2 + y_3),$$

für das zweite Flächenstück

$$F_{1-2} = \frac{b}{24}(-y_0 + 13\,y_1 + 13\,y_2 - y_3),$$

für das dritte Flächenstück

$$F_{2-3} = \frac{b}{24}(-y_1 + 13\,y_2 + 13\,y_3 - y_4)$$

usw. und für das letzte Flächenstück

$$F_{23-24} = \frac{b}{24}(y_0 - 5\,y_1 + 19\,y_2 + 9\,y_3).$$

Während der Umdrehung veränderlicher Widerstand im Kurbelkreis.

Im nachstehenden werden noch einige Fälle behandelt, in denen der Widerstand während einer Umdrehung nicht konstant ist. Zu diesen gehören die Pumpen für Gase und Flüssigkeiten. Der Verlauf des Widerstandes ist hier in gleicher Weise wie bei der Antriebsmaschine durch ein an der Arbeitsmaschine abgenommenes Indika-

tordiagramm gegeben. Die im vorhergehenden zugrunde gelegte Einzylinderdampfmaschine möge mit der Pumpe entweder derart gekuppelt sein, dass der Pumpenkolben auf der verlängerten Kolbenstange der Dampfmaschine sitzt oder dass die Pumpe durch ein besonderes Triebwerk von einer Kurbel der gemeinsamen Welle aus angetrieben wird. Ein weiterer Antrieb ist noch durch Zahnräder, Riemen oder Seile möglich. Hierbei bewirken jedoch die Spielräume zwischen den Zähnen, die Elastizität des Riemen- und Seilmaterials und das Rutschen auf den Scheiben, dass die Schwankungen der Geschwindigkeit bei der Antriebsmaschine und bei der Arbeitsmaschine nicht die gleichen sind.

Zur Bestimmung der Bewegungsverhältnisse führt man wieder die Tangentialkomponenten im Kurbelkreis der treibenden und widerstehenden Kräfte ein. Ein Uebereinanderlegen der Tangentialdruckdiagramme (Fig. 10 und 13) lässt erkennen, dass sich die Schwankungen des tangentialen Dampfdruckes über den Widerstand des Kompressors gegenüber dem Fall eines konstanten Widerstandes bedeutend vergrössert haben. Durch gegenseitige Verschiebung beider Diagramme lässt sich der Kurbelwinkel feststellen (bei Zwillingsanordnung), bei welchem die Geschwindigkeitsschwankungen ein Minimum werden.

Zur Erzielung einer gleichmässigen Wasser- bezw. Luftlieferung muss die Gleichförmigkeit der Drehbewegung durch ein entsprechend schweres Schwungrad gesichert werden. In besonderen Fällen hat das Schwungrad noch eine weitere Aufgabe. Da nämlich bei Pumpen die Leistung eines Hubes konstant ist — für konstante Saug- und Druckhöhe —, so kann eine Vergrösserung oder Verringerung der Gesamtförderleistung nur durch Vermehrung oder Verminderung der in der Zeiteinheit stattfindenden Hübe erzielt werden. So erfordert z. B. die Gebläsemaschine für ein Stahlwerk bei geringem Windbedarf, oder eine Presswasserpumpe, wenn das Akkumulatorgewicht seine höchste Stellung erreicht hat, eine sehr geringe Umdrehungszahl der Maschine; dabei darf dieselbe aber nicht zum Stillstand kommen. Mit Rücksicht darauf ist die Schwungradgrösse so zu bemessen, dass für eine geringste Tourenzahl die Geschwindigkeit im Kurbelkreis über dem Wert 0 bleibt. *Radinger* weist nach, [42]) dass die Maschine zum Stillstand kommt, sobald der Ungleich-

förmigkeitsgrad, definiert durch $\delta = \frac{v_{max.} - v_{min.}}{v_m}$, den Wert 2 erreicht, sobald also die Schwankungen der Geschwindigkeit über ihren mittleren Wert so gross werden wie dieser selbst. Es tritt dann an einer Stelle die Geschwindigkeit 0 auf. Das würde aber voraussetzen, dass das arithmetische Mittel der Grenzgeschwindigkeiten mit dem mittleren Wert während einer Umdrehung zusammenfällt. Das ist im allgemeinen nicht der Fall. [43]) Aus diesem Grunde wird das Steckenbleiben schon bei etwas höherer Tourenzahl stattfinden, als es dem Ungleichförmigkeitsgrad $\delta = 2$ entspricht. Mit Hilfe unseres analytischen Ausdruckes für die Winkelgeschwindigkeit können wir leicht die Tourenzahl bestimmen, bei welcher die Geschwindigkeit = 0 wird, bezw. die Grösse des Trägheitsmomentes des Schwungrades angeben, welches eine geforderte geringste Tourenzahl zulässt, ohne dass die Maschine zum Stillstand kommt.

Wir untersuchen zunächst einen mit der Einzylinderdampfmaschine direkt gekuppelten Kompressor (Tandemanordnung).

Zu diesem Zwecke analysieren wir das in Fig. 13 dargestellte Tangentialdruckdiagramm eines Kompressors und erhalten

$$W = 4200 + 620 \cos\varphi - 3150 \cos 2\varphi - 620 \cos 3\varphi$$
$$- 1050 \cos 4\varphi + 140 \sin\varphi - 4200 \sin 2\varphi$$
$$- 840 \sin 3\varphi + 525 \sin 4\varphi.$$

Das Moment der äusseren Kräfte in bezug auf das Wellenmittel ist dann

$$Q = r(T - W) - [G_k k' + M_3 g r (1 - a)] \cos\varphi$$
$$= r T_m [-0{,}138 \cos\varphi + 0{,}067 \cos 2\varphi - 0{,}146$$
$$\cos 3\varphi - 0{,}067 \cos 4\varphi + 0{,}09 \sin\varphi + 2{,}06 \sin 2\varphi$$
$$- 0{,}324 \sin 3\varphi - 0{,}218 \sin 4\varphi]$$

und

---

[42]) *Radinger*, Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, S. 268.

[43]) siehe die Geschwindigkeitskurve in Fig. 11.

$$\int_0^{\varphi} Q\,d\varphi = r\,T_m\,[1{,}174 - 0{,}138 \sin\varphi - 0{,}034 \sin 2\varphi$$
$$- 0{,}049 \sin 3\varphi - 0{,}016 \sin 4\varphi - 0{,}09 \cos\varphi$$
$$- 1{,}03 \cos 2\varphi + 0{,}108 \cos 3\varphi + 0{,}054 \cos 4\varphi].$$

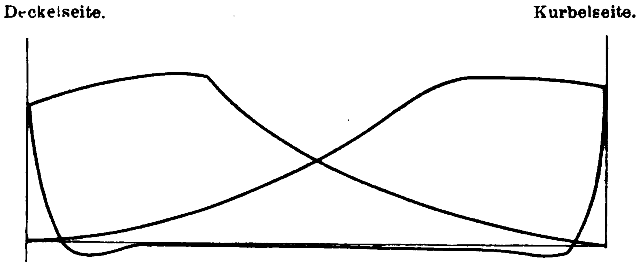
Aus der Energiegleichung folgt:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 + \frac{2\,r\,T_m}{M\,r^2}\,[1{,}174 - \text{(periodische Glieder)}]$$

worin M die auf den Kurbelzapfen reduzierte Masse der nur rotierenden Teile bedeutet; die hin- und hergehenden Massen können in dem vorliegenden Falle vernachlässigt werden. Den konstanten Betrag auf der rechten Seite setzen wir wieder gleich dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit; daher

$$\left(\frac{\pi\,.\,n}{30}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0^2 + \frac{2\,r\,T_m}{M\,r^2}\,.\,1{,}174\ ^{44)}$$

Das Minimum der Geschwindigkeit fällt hier zusammen mit dem Punkte $\varphi = 0$, da sich dort die treibende



Indikator-Diagramm eines Kompressors.
Fig. 14.

und widerstehende Kraftkurve schneiden. Die Maschine bleibt stehen bei $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$. Man hat daher zur Bestim-

---

[44]) Gerade hier erscheint eine genauere Verfolgung der Rechnung nach dem in der Fussnote auf S. 21 skizzierten Verfahren geboten. Die auf obige einfache Weise erhaltenen Ergebnisse zeigen indessen eine befriedigende Uebereinstimmung mit Werten, welche die Nachprüfung ausgeführter Maschinen ergibt.

mung der kleinsten Tourenzahl bezw. des entsprechenden Trägheitsmomentes des Schwungrades die Beziehung

$$\left(\frac{\pi \cdot n}{30}\right)^2 = \frac{2 \cdot r\, T_m}{M\, r^2} \cdot 1{,}174.$$

Führen wir noch statt des mittleren Tangentialdruckes die Arbeit in der Umdrehung $A = 2\, r\, \pi \,.\, T_m$ ein, so erhalten wir

$$n_{min.} < \sqrt{\frac{35\, A}{M\, r^2}}$$

als Tourenzahl, bei welcher die Maschine zum Stillstand kommt bezw.

$$M\, r^2 > \frac{35\, A}{n^2_{min.}}$$

als zugehöriges Trägheitsmoment des Schwungrades. Die niedrigste mögliche Tourenzahl wird so bemessen, dass sie sicher unter der im Betriebe vorkommenden liegt. Die zugrunde gelegten Diagramme entsprechen normalen Verhältnissen. Das Ergebnis kann deshalb auch allgemeine Anwendung für Maschinen der bezeichneten Betriebsart finden.

Für doppeltwirkende Wasserpumpen erhält man auf gleiche Weise

$$n_{min.} > \sqrt{\frac{20\, A}{M\, r^2}} \text{ bezw. } M\, r^2 > \frac{20\, A}{n^2_{min.}}$$

Hierbei ist der Verlauf des tangentialen Pumpenwiderstandes durch die Reihe ausgedrückt

$$P = P_m\, (1 + 0{,}15 \cos \varphi - 0{,}75 \cos 2\, \varphi - 0{,}05 \cos 3\, \varphi - 0{,}15 \cos 4\, \varphi - 0{,}15 \cos 5\, \varphi).$$

Werden zwei doppeltwirkende Pumpen in Zwillingsanordnung durch eine Verbundmaschine mit 90 ° Kurbelversetzung angetrieben — Niederdruckzylinder voreilend —, so erhält man unter der annähernd zutreffenden Voraussetzung, dass auch in diesem Falle die kleinste Geschwindigkeit mit derjenigen im inneren Totpunkt ($\varphi = 0$) zusammenfällt, als Wert für die kleinste Tourenzahl

$$n_{\min.} < \sqrt{\frac{15\,A}{M\,r^2}} \text{ bei Luftpumpen}$$

und

$$n_{\min.} < \sqrt{\frac{8\,A}{M\,r^2}} \text{ bei Wasserpumpen.}$$ [45])

Weitere Fälle eines variabeln Widerstandes.

Der Widerstand, den die Propeller der Schiffsmaschinen im Wasser finden, ist abhängig von der Geschwindigkeit. Die Hydrodynamik ist noch nicht imstande, das

---

[45]) Es soll z. B. für eine Presswasserpumpe, welche 1 cbm in der Minute auf 50 Atm. zu pressen hat, das Schwungrad für die geringste, im Betriebe vorkommende Tourenzahl von zehn Umdrehungen in der Minute bestimmt werden. Die Anlage besteht aus zwei Differentialpumpen in Zwillingsanordnung, welche von einer Verbunddampfmaschine mit siebzig Umdrehungen in der Minute (normal) angetrieben wird.

Die Leistung der Maschine beträgt

$$N = 1{,}1\,\frac{1000\,.\,Q\,.\,10\,.\,p}{60\,.\,60\,.\,75\,.\,\eta} = 1{,}1\,.\,\frac{1000\,.\,60\,.\,10\,.\,50}{60\,.\,60\,.\,75\,.\,0{,}95} = \infty\,130\,\text{PS}$$

Die Arbeit f. d. Umdrehung

$$= \frac{130\,.\,75\,.\,60}{70} = 8350 \text{ mkg} = A$$

Damit die Maschine nicht gerade bei der geringsten Tourenzahl 10 zum Stillstand kommt, werde der Ermittlung des Trägheitsmomentes des Schwungrades der Wert $n = 8$ zugrunde gelegt.

Es wird dann

$$M\,r^2 = \frac{8\,.\,8350}{64} = 1040.$$

Dem entspricht bei einem Durchmesser des Schwerpunktskreises des Kranzes von 3,5 m ein Kranzgewicht von

$$G = \frac{1040}{3{,}06}\,.\,9{,}81 = 3330 \text{ kg.}$$

Interessiert es, die Grösse des Ungleichförmigkeitsgrades zu kennen, welche bei diesem Schwungrad im normalen Betriebe bei siebzig Umdrehungen vorhanden ist, so hat man nach dem üblichen Verfahren die grösste überschiessende Fläche zwischen dem tangentialen Dampf- und Pumpendruck — letzterer ist für den vorliegenden Fall in Fig. 18 eingetragen — zu bestimmen und deren Arbeitswert A' festzustellen.

Es ist dann

$$\delta = \frac{A'}{M\,r^2\,.\,\omega^2} = \frac{900}{1040\,.\,53{,}3} = \infty\,\frac{1}{62}.$$

genaue Gesetz dieser Abhängigkeit anzugeben; jedoch deckt sich die quadratische Funktion, welche man für die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit annimmt, noch am besten mit der Erfahrung. Man könnte nun zunächst für ein gegebenes Kraftfeld einen vorläufigen Wert der Geschwindigkeit unter Voraussetzung eines konstanten Widerstandes aufsuchen. Einen genaueren Wert der Geschwindigkeit erhält man für einen Widerstand, welcher von der zuerst gefundenen Geschwindigkeit in quadratischem Verhältnis abhängig ist. Mit Hilfe eines solchen alternierenden Verfahrens könnte man dem wirklichen Verlauf der Geschwindigkeit möglichst nahe kommen. Im vorliegenden Falle ist es unerlässlich, die Formänderungsarbeit der elastischen Schraubenwelle in die Energiegleichung einzuführen.[46])

Ein weiterer Fall, wo der Widerstand von der Geschwindigkeit abhängig ist, liegt vor bei Dynamomaschinen. Die Abhängigkeit wird eine sehr verwickelte bei Wechselstrommaschinen, namentlich ohne selbständige Felderregung. Durch grosse Schwungmassen sucht man die periodischen und aperiodischen Schwankungen der Geschwindigkeit möglichst klein zu halten. Bei Riemenübertragung reduzieren sich durch die Elastizität und das Gleiten der Riemen die Geschwindigkeitsschwankungen auf ihrem Wege von der Antriebsmaschine zur Dynamomaschine und umgekehrt beträchtlich. Bei unmittelbarer Kupplung durch eine stark elastische Welle dagegen können die Geschwindigkeitsschwankungen mit der Annäherung an den Resonanzfall, d. i. der Periodengleichheit der Eigenschwingungen der Welle und der Schwankungen der treibenden Kraft, sich bedeutend verstärken, Eine Vergrösserung der Schwungmasse könnte in diesem Falle unter gewissen Umständen sogar nachteilig sein.

In ganz analoger Weise kann bei der Parallelschaltung von zwei oder mehreren Wechselstrommaschinen auch die Anwendung noch so grosser Schwungmassen verhindern, dass beträchtliche Geschwindigkeitsschwankungen auftreten. Diese beim Parallelbetrieb von Wechselstrommaschinen auftretenden, in der Natur der mit Kurbeltrieb arbeitenden Antriebsmaschinen liegenden dynamischen

---

[46]) s. *Frahm*, Neue Untersuchungen usw., Z. d. V. d. I. 1902, S. 883.

Erscheinungen sollen im folgenden in Anlehnung an eine Abhandlung von *Rosenberg* über die „Anforderungen an Antriebmotoren beim Parallelbetrieb von Wechselstromdynamos“ [47]) näher besprochen werden.

Zwei mit gleicher Geschwindigkeit und gleicher Kurbelstellung arbeitende Maschinen zeigen in der Stromlieferung keine Veränderung gegenüber dem Verhalten einer einzelnen Maschine. Eine differierende Kurbelstellung jedoch, die unvermeidlich ist, hat Geschwindigkeitsunterschiede beider Maschinen zur Folge und diese bewirken, dass Strom von der einen Maschine zur andern übergeht. Die Geschwindigkeitsunterschiede könnten sich soweit steigern, dass der ganze Strom zwischen den beiden Maschinen hin- und herpendelt, wenn nicht die synchronisierende Kraft dies verhinderte. Die voreilende Maschine erleidet nämlich im elektrischen Feld einen grösseren Widerstand, durch welchen sie selbst verzögert wird, während der durch seine Ueberwindung entstehende Strom der nacheilenden Maschine zufliesst und dieselbe beschleunigt. So zwingt die Eigenschaft der Dynamomaschine, bald als Generator, bald als Motor zu wirken, die beiden parallel geschalteten Antriebsmaschinen immer wieder zu gleichmässigem Lauf. Der Widerstand gegen das Voreilen ist die synchronisierende Kraft, deren Abhängigkeit von der Voreilung jedoch noch nicht ganz erforscht ist.

Bei kleinen Beträgen des Voreilens kann die synchronisierende Kraft proportional der Grösse des Voreilens gesetzt werden in ganz analoger Weise wie bei der elastischen Deformation. Im folgenden ist dieses einfache Gesetz trotz der in Wirklichkeit nicht unbeträchtlichen, relativen Verdrehungen der Magneträder parallel geschalteter Maschinen der Betrachtung zugrunde gelegt worden, was bei der Unsicherheit des gesetzmässigen Zusammenhanges um so eher zulässig schien, als die Resultate der Untersuchung vergleichsweise immer noch einen Wert haben.

---

[47]) s. Z. d. V. d. I. 1904, S. 793.

s. auch *Sommerfeld:* „Das Pendeln parallel geschalteter Wechselstrommaschinen.“ Elektrotechn. Zeitschrift 1904, S. 273 u. ff.

Den gleichen Gegenstand behandelt *Görges* in dieser Zeitschrift, Jahrg. 1902, S. 425 u. ff.

Ist einmal durch eine äussere Kraftschwankung eine Voreilung des einen Magnetrades bezw. Ankers eingetreten, so wird durch die gleichzeitig auftretende synchronisierende Kraft eine Rückdrehung in die Gleichgewichtslage relativ zu der parallel geschalteten Maschine stattfinden. Infolge der Trägheit der Massen wird jedoch diese Gleichgewichtslage überschritten, und erst nach einer Reihe von Schwingungen um dieselbe gelangen die parallel geschalteten Räder durch die dämpfenden Widerstände gegenseitig zur Ruhe. Wiederholen sich die äusseren Kraftschwankungen in periodischem Wechsel, so werden die einmal angeregten Schwingungen unterhalten. Die hauptsächlichste Ursache der Pendelungen der Magneträder

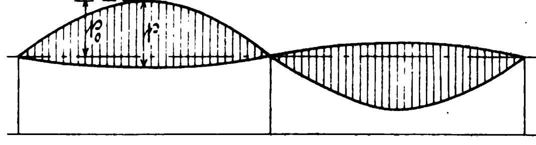


Fig. 15.

liegt in den periodischen Schwankungen des Drehmomentes.[48]) Die daraus entstehenden relativen Schwingungen sind im allgemeinen nicht gefährlich, weil sie durch die immer vorhandenen grossen Schwungmassen in kleinen Grenzen gehalten werden, jedoch nur so lange, als man von dem Falle der Resonanz, d. i. dem Zusammenfallen der Periode der frei pendelnden Magneträder [49]) und der Impulse der Antriebsmaschine, weit genug entfernt ist. Andernfalls verstärken sich die Pendelungen, bis die Maschinen schliesslich aus dem Takte fallen. Um dem kritischen Falle der Resonanz fern zu bleiben, ist es daher wichtig, ausser der Grösse des Trägheitsmomentes der bewegten Massen, auch die Periode der Antriebsimpulse festzustellen.

---

[48]) Der Parallelbetrieb leidet auch unter den Massenschwingungen des aus seiner Gleichgewichtslage gebrachten Regulators. Die Eigenschwingungen desselben können aber durch eine Oelbremse gedämpft und durch Veränderung der Massen von der kritischen Schwingungszahl ferngehalten werden. Siehe *Föppl:* Elektrotechn. Zeitschr. 1902, S. 10; *Thümmler,* Fliehkraft und Beharrungsregler, Anhang 1903.

[49]) Darunter ist die Eigenschwingung des einen Magnetrades oder Ankers gegen das mit ihm durch elektrische Kupplung verbundene andere Rad zu verstehen.

Rosenberg ersetzt die Schwankungen des Tangentialdruckes der Antriebsmaschine über einen konstanten Widerstand durch eine einfache Sinuswelle (Fig. 15). Die Voreilungen gegenüber einer sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegenden Maschine verlaufen alsdann auch nach dem Sinusgesetz in der Phase gegenüber den Schwankungen des Tangentialdruckes um 180^0 verschoben. Die den Voreilungen proportionalen synchronisierenden Kräfte kommen zu dem bei Beginn der Betrachtung konstant angenommenen Widerstand hinzu. Dadurch werden nun die Schwankungen des Tangentialdruckes gegenüber dem neuen Widerstand verändert, woraus wieder das Auftreten einer grösseren synchronisierenden Kraft resultiert. So stellt sich schliesslich nach einer Reihe von Umdrehungen eine Vergrösserung der Schwankungen des Drehmomentes und damit auch der Geschwindigkeit und des Ungleichförmigkeitsgrades ein.

Den Endwert p der in geometrischer Reihe fortschreitenden Schwankungen des Drehmomentes erhält man durch Summierung der Zuschläge bei jeder Umdrehung zu

$$p = \frac{1}{1 - q} p_0,$$

wenn p_0 den Ausgangswert der Schwankung bedeutet. q nennt *Rosenberg* das Reaktionsverhältnis der Wechselstrommaschine, d. h. das Verhältnis der anfänglich vorhandenen, durch die Schwungradgrösse bedingte Voreilung, bezw. die dadurch hervorgerufene synchronisierende Kraft zur anfänglichen Schwankung des Drehmomentes an der Kurbel. Die Beziehung zwischen q und den elektrischen und dynamischen Grössen der Maschine ist ausgedrückt durch

$$q = 174 \cdot j \cdot \eta \cdot \mathbf{p} \frac{D^2}{n} \frac{N_e}{M r^2},$$

worin j das Verhältnis des Kurzschlusstromes zum normalen Wattstrom,

η der Wirkungsgrad der Dynamo,

$\mathbf{p}$ die Polpaarzahl,

n die Umdrehungszahl i. d. Minute,

N_e die Nutzleistung in PS,

$M r^2$ das Trägheitsmoment der rotierenden auf den Kurbelzapfen reduzierten Massen,

D die Dauer der Periode eines Antriebsimpulses

bedeutet.

Letztere Grösse ist von besonderer Wichtigkeit für den Parallelbetrieb. Man erkennt, dass bei einer ausgeführten Maschine eine bestimmte Schwungradgrösse ($M r^2$) nur dann q von dem kritischen Wert entfernt halten kann, wenn die Dauer der Periode eines Antriebsimpulses klein genug ist. Diese hat aber mit der Grösse des Ungleichförmigkeitsgrades nichts zu tun, sondern hängt lediglich davon ab, wie viel Schwingungen das Drehmoment während eines Umlaufes aufweist. Ist *eine* Schwingung vorhanden, so ist die Dauer derselben $D_1 = \frac{60}{n}$ Sekunden, wenn n die Anzahl der Umdrehung in der Minute ist.

Bei zwei Schwingungen ist $D_2 = \frac{60}{2n}$, bei drei $D_3 = \frac{60}{3n}$ usw. und der Einfluss der Schwingungsdauer auf den Wert q ist nur $^1/_4$, $^1/_9$, $^1/_{16}$ usw. im Vergleich zu dem Einfluss einer einphasigen Schwingung. Letztere sind deshalb für den Parallelbetrieb als die gefährlicheren zu betrachten. Bei den im Viertakt arbeitenden Gasmaschinen findet die Zuführung des Kraftmittels nach jeder zweiten Umdrehung statt; es kommen hierbei im Tangentialdruckdiagramm auch Kraftschwingungen von der Dauer einer halben Umdrehung vor.

Nachstehend sind die Analysen einer Reihe von Tangentialdruckdiagrammen wiedergegeben, welche aus den Kolbenkräften von Dampf- und Gasmaschinen in verschiedenen Anordnungen gebildet sind. Durch den Vergleich derselben nach den oben angegebenen Gesichtspunkten lässt sich ein Masstab für die Verwendbarkeit der einzelnen Maschinengattungen zum Antrieb parallel geschalteter Wechselstrommaschinen gewinnen.[50])

---

[50]) Ebenso wichtig wie für die verschiedenen Maschinengattungen sind die Analysen für dieselbe Maschine bei verschiedenen Belastungen, wie sie von *Boucherot* ausgeführt wurden; s. „Bulletin de la Société internationale des Electriciens“ 1901, S. 534. s. auch *Arnold:* „Wechselstromtechnik“, 4. Bd., S. 546.

1. Einzylinder-Dampfmaschine mit Kondensation (Fig. 10).

$$T = Tm\,(1 + 0{,}148 \cos \varphi - 0{,}685 \cos 2\varphi - 0{,}148 \cos 3\varphi - 0{,}318 \cos 4\varphi + 0{,}124 \sin \varphi + 1{,}07 \sin 2\varphi + 0{,}124 \sin 3\varphi - 0{,}093 \sin 4\varphi).$$

2. Verbundmaschine mit Kondensation und 90° Kurbelversetzung (Fig. 18 und 19).

a) bei voreilender Hochdruckkurbel.

$$T = Tm\,(1 + 0{,}075 \cos \varphi + 0{,}2 \cos 2\varphi + 0{,}081 \cos 3\varphi - 0{,}194 \cos 4\varphi - 0{,}058 \cos 5\varphi + 0{,}122 \sin \varphi + 0{,}31 \sin 2\varphi + 0{,}154 \sin 3\varphi + 0{,}026 \sin 4\varphi + 0{,}029 \sin 5\varphi).$$

b) bei voreilender Niederdruckkurbel.

$$T = Tm\,(1 + 0{,}023 \cos \varphi - 0{,}2 \cos 2\varphi + 0{,}014 \cos 3\varphi - 0{,}194 \cos 4\varphi - 0{,}029 \cos 5\varphi + 0{,}035 \sin \varphi - 0{,}31 \sin 2\varphi + 0{,}08 \sin 3\varphi + 0{,}026 \sin 4\varphi - 0{,}052 \sin 5\varphi).$$

3. Verbundmaschine in Tandemanordnung.

$$T = Tm\,(1 - 0{,}02 \cos \varphi - 0{,}81 \cos 2\varphi + 0{,}066 \cos 3\varphi - 0{,}194 \cos 4\varphi - 0{,}058 \cos 5\varphi + 0{,}072 \sin \varphi + 0{,}785 \sin 2\varphi + 0{,}026 \sin 4\varphi + 0{,}029 \sin 5\varphi).$$

Die Einzeldiagramme des Hoch- und Niederdruckzylinders werden durch die Reihen dargestellt (Fig. 16 und 17):

3a. Für den Hochdruckzylinder.

$$T = Tm\,(1 + 0{,}105 \cos \varphi - 0{,}61 \cos 2\varphi - 0{,}39 \cos 4\varphi - 0{,}105 \cos 5\varphi + 0{,}1 \sin \varphi + 1{,}1 \sin 2\varphi + 0{,}172 \sin 3\varphi - 0{,}06 \sin 4\varphi + 0{,}06 \sin 5\varphi).$$

3b. Für den Niederdruckzylinder.

$$T = Tm\,(1 + 0{,}144 \cos \varphi - 1{,}0 \cos 2\varphi - 0{,}144 \cos 3\varphi - 0{,}035 \sin \varphi + 0{,}475 \sin 2\varphi + 0{,}115 \sin 3\varphi + 0{,}11 \sin 4\varphi).$$

4. *Gasmaschine, im Zweitakt einfach wirkend* (Fig. 20 und 21) oder *im Viertakt doppelt wirkend.*

$$T = Tm\,(1 + 0{,}446 \cos \varphi - 0{,}473 \cos 2\,\varphi$$
$$- 0{,}446 \cos 3\,\varphi - 0{,}446 \cos 4\,\varphi$$
$$- 0{,}206 \cos 5\,\varphi - 0{,}08 \cos 6\,\varphi$$
$$+ 2{,}67 \sin \varphi - 0{,}206 \sin 2\,\varphi + 0{,}333 \sin 3\,\varphi$$
$$+ 0{,}266 \sin 4\,\varphi + 0{,}063 \sin 5\,\varphi).$$

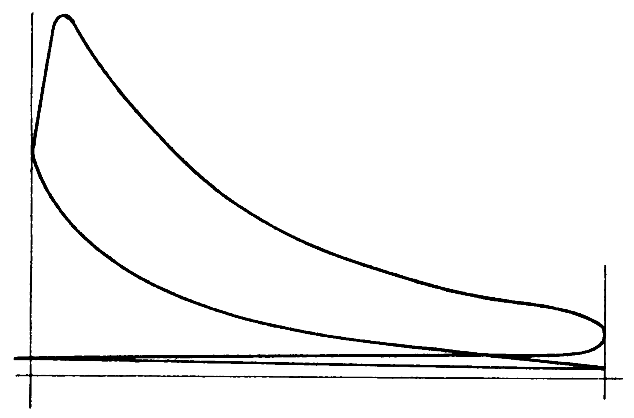


Fig. 20. Indikator-Diagramm.

5. *Gasmaschine, im Zweitakt doppelt wirkend* (Fig. 22) oder *im Viertakt doppelt wirkend bei zwei Zylindern.*

$$T = Tm\,(1 + 0{,}153 \cos \varphi - 0{,}8 \cos 2\,\varphi$$
$$- 0{,}153 \cos 3\,\varphi - 0{,}19 \cos 4\,\varphi$$
$$+ 0{,}116 \sin \varphi + 1{,}83 \sin 2\,\varphi$$
$$+ 0{,}173 \sin 3\,\varphi + 0{,}466 \sin 4\,\varphi).$$

Das an der Kurbel auftretende, *resultierende* Drehmoment, dessen Schwankungen für den Parallelbctrieb wichtig sind, setzt sich zusammen aus dem Moment der Tangentialkomponente des Kolbendruckes und der Momente der Massenkräfte und Gewichte in bezug auf das Wellenmittel. Letztere schwanken während einer Umdrehung nach bekannten Gesetzen, und zwar das Moment des Massendrucks der bewegten Teile nach der Reihe (s. Fig. 10)

$$- \frac{r^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Bigg[- \frac{\lambda}{2} (M_2 + a\, M_3) \sin \varphi$$

$$+ \Big(M_2 + (2\,a - b)\, M_3\Big) \sin 2\,\varphi$$

$$+ \frac{3\,\lambda}{2} (M_2 + a\, M_3) \sin 3\,\varphi \Bigg],$$

wobei die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ konstant angenommen werden kann. Es werden dadurch die Schwingungen erster Ordnung des tangentialen Kolbendruckes in fast allen Fällen vergrössert, diejenigen zweiter und dritter Ordnung verkleinert.

Die Drehmomente der Triebwerksgewichte befolgen das Gesetz

$$- \Big[G_k\, k' + M_3\, g\, r\, (1 - a) \Big] \cos \varphi$$

bei liegender Anordnung, und

$$+ \Big[G_k\, k' + (M_2 + M_3)\, g\, r \Big] \sin \varphi$$

bei stehender Anordnung, beeinflussen daher die gefährlichen Schwingungen erster Ordnung des tangentialen Kolbendrucks. Gegengewichte ermöglichen eine Korrektur der Schwankungen des resultierenden Drehmomentes in den meisten Fällen in einem für den Parallelbetrieb günstigen Sinne.

Die Reaktionen und ihr Ausgleich beim Mehrkurbelgetriebe.

Zum Schlusse sollen noch einige mehr referierende Bemerkungen über die kinetostatischen Verhältnisse folgen. Zu dem Verlauf der Reaktionen des Zahlenbeispiels der Einkurbelmaschine ist zu bemerken, dass die aus der Bewegung entstehenden Kräfte in allen Fällen die auf das Kurbellager und auf die Kreuzkopfführung wirkenden Kolbendrücke derart beeinflussen, dass die Schwankungen der Gesamtreaktionen während einer Umdrehung geringer werden. Zur Beurteilung der Heftigkeit von Stössen durch den Wechsel der Kräfte in ihrer Grösse und Richtung und zur Bestimmung der Stellen grösster Abnutzung

ist beim Kurbellager eine vektorielle Darstellung der Resultierenden aus den wagerechten und senkrechten Lagerreaktionen geeignet. [51])

Die von den Geschwindigkeitsschwankungen der Kurbel herrührenden Lagerdrucke sind in dem vorliegenden Falle unbeträchtlich. Auch das Drehmoment an der Kurbel wird nur in geringem Masse durch die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit beeinflusst und zwar in dem Sinne, dass hauptsächlich die Schwankungen mit dem dreifachen Kurbelwinkel vergrössert werden.

Was die Reaktionen des Mehrkurbelgetriebes betrifft, so bietet die Bestimmung derselben keine weiteren Schwierigkeiten. In ganz analoger Weise wie beim Einkurbelgetriebe ist als Grundlage für die Untersuchung der kinetischen und kinetostatischen Verhältnisse die lebendige Kraft des ganzen Getriebes aufzustellen, welche sich als Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Getriebe ergibt. Unter Einführung von Phasenwinkeln α_1, α_2, α_3 usw., welche den Kurbelversetzungen entsprechen, ist bei n gleichen Getrieben die gesamte lebendige Kraft

$$L = \frac{r^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Bigg[M_1 + n \Bigg\{\frac{M_2}{2} + \left(1 - a + \frac{b}{2}\right) M_3$$

$$- \left(\frac{M_2}{2} + \left(a - \frac{b}{2}\right) M_3\right) \cos 2 (\varphi + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)$$

$$+ \frac{\lambda}{2} (M_2 + a M_3)$$

$$\left(\cos (\varphi + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots) - \cos 3 (\varphi + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)\right)\Bigg\}\Bigg]$$

Die Behandlung des äusseren Kraftfeldes bei Mehrkurbelmaschinen ist schon auf S. 31 angedeutet. Auf dem in den ersten Abschnitten bezeichneten Wege lassen sich Geschwindigkeit und Beschleunigung der Drehbewegung bestimmen und in gleicher Weise wie beim ebenen Einkurbelmechanismus auch die Gesamtreaktionen aufstellen.

Die Frage des Ausgleichs der Reaktionen gewinnt beim Mehrkurbelgetriebe deshalb an Interesse, weil es bei einer bestimmten Anzahl der Kurbeln möglich ist, ohne

---

[51]) s. *Wehage,* Ueber den ruhigen Gang der Dampfmaschinen mit Kurbelwelle. Z. d. V. d. I. 1884, S. 664.

Anwendung von Zusatzmassen einen vollständigen Ausgleich der freien Kräfte und Momente zu erzielen. Die erste praktische Lösung dieses Problems rührt von *Schlick*[52]) her. Die analytische Behandlung desselben, welche sich bei *Schubert*: „Zur Theorie des *Schlick*schen Problems" und bei *Lorenz*: „Dynamik der Kurbelgetriebe" findet, führt die dynamische Aufgabe auf den Fall des Gleichgewichts der den einzelnen Kurbelstellungen entsprechenden Massenkräfte und deren Momente in wagerechter und senkrechter Richtung zurück. [53])

Der Einfluss der Schwankungen der Geschwindigkeit im Kurbelkreis tritt nicht in die Gleichgewichtsbedingungen ein, d. h. der Ausgleich der Massenkräfte und Momente bleibt bestehen, wie gleichförmig oder ungleichförmig sich auch die Welle dreht.

Dem Ausgleich der Reaktionen, welche allein durch die Bewegung entstehen, stellt Prof. *Heun*, in Berücksichtigung des Umstandes, dass man es bei den z. B. eine Schiffsmaschine stützenden Teilen nicht mit einem starren Körper zu tun hat, vielmehr mit einem Körper, der mannigfacher Formänderungen fähig ist, den Ausgleich der Gesamtreaktionen mit Einschluss der aus den äusseren Kräften resultierenden Stützdrucke und deren Momente gegenüber. Es kann in diesem Falle nicht mehr von einem Ausgleich in dem Sinne gesprochen werden, dass die Summe der Reaktionen und deren Momente $= 0$ wird, sondern dass die notwendig bestehenbleibenden Reaktionen in ihrer Gesamtwirkung auf das Fundament möglichst wenig Schwankungen zeigen. Diese Forderung nach einem Minimum der Reaktionsschwankungen bedingt ein bestimmtes Verhältnis der Kurbelwinkel und -abstände, sowie der bewegten Massen, welches im allgemeinen von demjenigen verschieden sein wird, welches dem reinen Massenausgleich entspricht. Zur Bestimmung der Kurbelversetzungswinkel liesse sich in ähnlicher Weise wie im letzteren Falle eine analytische Beziehung aufstellen, indem man die erste und zweite Ableitung der Summe der

---

[52]) Z. d. V. d. I. 1894, S. 1090.

[53]) Die graphische Behandlung der Gleichgewichtsbedingungen zeigt *Taylor* im „Journal of the American Society of Naval Engineers".

Siehe das Referat darüber von *Fränzel*, Z. d. V. d. I. 1898, S. 907.

Reaktionen nach den Kurbelversetzungswinkeln = o setzt; dabei verschwinden jetzt nicht mehr die Glieder, welche die Winkelbeschleunigung enthalten. Jedoch führt ein solches Verfahren nicht zum Ziel. Es gibt eben bei fast allen Aufgaben der Technik keine absoluten Maxima und Minima im mathematischen Sinne, es ist vielmehr die Menge der zu erfüllenden Bedingungen so zu berücksichtigen, dass schliesslich als Kompromiss ein mit allen Bedingungen verträgliches Maximum oder Minimum zustande kommt. Man wird deshalb für den Ausgleich der freien Massenkräfte und Momente zunächst die Kurbelwinkel und Abstände und die Massen bestimmen und dieselben nachträglich so abändern, dass die Gesamtreaktionen am Kurbellager und am Kreuzkopf keine zu grossen Schwankungen zeigen und dass dabei gleichzeitig denjenigen Forderungen einigermassen entsprochen wird, welche mit Rücksicht auf den Betrieb der Maschine, die Lebensdauer ihrer Teile, insbesondere der Lager, die leichte Manövrierfähigkeit, die Steuerungsverhältnisse, das Gesamtgewicht, die Raumverhältnisse und die Herstellung zu erfüllen sind.

Lorenz [54]) und *Berling* [55]) haben speziell die Frage untersucht, welche Kurbelwinkel einem günstigen Massenausgleich und gleichzeitig einem möglichst gleichförmigen Drehmoment an der Welle entsprechen. Dadurch wird nicht bloss eine gleichmässige Geschwindigkeit der Welle erreicht, sondern auch ein möglichst gleichmässiger Verlauf des Gesamtreaktionsmomentes am Kreuzkopf in bezug auf das Wellenmittel, welches dem Drehmoment an der Kurbel gleich ist und durch welches die Maschine in einer zur Wellenachse senkrechten Ebene zu kippen strebt. In gleicher Weise sollten die Kurbelwinkel für einen günstigen Massenausgleich mit denjenigen in Einklang gebracht werden, bei welchen die Gesamtreaktionen am Kurbellager einen gleichmässigen Verlauf zeigen. Letztere Forderung erscheint für die Maschine von der gleichen Bedeutung wie die des reinen Massenausgleichs, denn die Grösse der Gesamtreaktionen bedingt die Grösse

---

54) Dynamik der Kurbelgetriebe, S, 97.

55) Schiffsschwingungen, Ursachen und Kritik der Mittel zu ihrer Verminderung, Z. d. V. d. I. 1899, S. 981.

Siehe auch *Rüdenberg*, Die günstigsten Kurbelwinkel für stationäre Maschinen, D. p. J. 1904, 319, S. 417 u. ff.

der Formänderungen des Maschinengestells und damit auch der elastischen Unterlage. Daraus könnten die Vibrationen ihre Erklärung finden, welche auf Dampfern selbst bei weitgehendem Massenausgleich noch beobachtet werden können. Die Ursache dieser restierenden Schwingungen führt *Schlick* [56]) auf kleine Abweichungen in den Steigungswinkeln der einzelnen Schraubenflügel des Propellers zurück. Diese Vermutung hat einige Wahrscheinlichkeit für sich. Die zu ihrer Unterstützung angeführte Erscheinung aber, dass die Schwingungen ausbleiben, wenn die Schrauben abgekuppelt sind, begründet ebensowohl die Vermutung, dass die Deformationen der Maschine und ihres Fundamentes den Schiffskörper zu Vibrationen veranlassen können; denn nach Abkupplung der Schrauben ist das Kraftfeld aus der Maschine entfernt und damit die Ursache für das Zustandekommen der elastischen Deformationen. Eine genaue rechnerische Verfolgung der Erscheinungen zur Bestätigung der einen oder anderen Ansicht ist kaum möglich. Ueber den Einfluss der Reaktionen lässt sich aber vergleichsweise ein allgemeines Urteil gewinnen, wenn man deren Grösse und Verlauf kennt. Es sind zu diesem Zwecke für eine vierzylindrige Schnellzugslokomotive die Gesamtreaktionen in den Achslagern in Richtung der Kolbenbewegung ermittelt und in Fig. 23—25 auf der Basis des abgewickelten Kurbelkreises dargestellt, und zwar einmal für den Fall, dass die vier Kurbeln in Kreuzstellung angeordnet sind, und dann für eine nach dem *Schlick*schen Verfahren ausgeglichene Maschine mit entsprechenden Kurbelversetzungswinkeln, jedoch gleichen Zylinderabständen wie im ersteren Fall, und mit den für den Ausgleich erforderlichen Massen. Der Verlauf der Gesamtreaktionen auf ein Achslager in wagerechter Richtung während einer Umdrehung ist für die *Schlick*sche Maschine sowohl mit Rücksicht auf die absolute Grösse der Reaktionen wie auf deren Wechsel wesentlich ungünstiger, wie bei der Maschine, deren Kurbeln in Kreuzstellung angeordnet sind. In der Tat haben auch Probefahrten auf der badischen Staatsbahn [57]) mit vierkurbeligen Schnellzugslokomotiven — Kurbeln in

---

56) Untersuchungen über die Vibrationserscheinungen bei Dampfern. Leipzig, 1903.

57) Z. d. V. d. I. 1904, S. 1087 und D. p. J. 1904, **319**, S. 465.

Kreuzstellung — bei einer Fahrgeschwindigkeit bis zu 140 km in der Stunde einen durchaus ruhigen Lauf der Maschinen, wozu vor allem der grosse Radstand beitrug, ergeben, trotzdem die Zylinder in einem für den Massenausgleich ungünstigen Sinne — Niederdruckzylinder aussen — angeordnet sind.

Anhang.

Häufig vorkommende trigonometrische Beziehungen.

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \varphi)$$

$$\sin^3 \varphi = \frac{1}{4} (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi)$$

$$\sin 2 \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (\cos \varphi - \cos 3 \varphi)$$

$$\sin 3 \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (\cos 2 \varphi - \cos 4 \varphi)$$

$$\sin 4 \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (\cos 3 \varphi - \cos 5 \varphi)$$

$$\sin 3 \varphi \sin 2 \varphi = \frac{1}{2} (\cos \varphi - \cos 5 \varphi)$$

$$\sin 4 \varphi \sin 2 \varphi = \frac{1}{2} (\cos 2 \varphi - \cos 6 \varphi)$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2 \varphi$$

$$\sin 2 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} (\sin 3 \varphi + \sin \varphi)$$

$$\sin 3 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} (\sin 4 \varphi + \sin 2 \varphi)$$

$$\sin 4 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} (\sin 5 \varphi + \sin 3 \varphi)$$

$$\sin 2 \varphi \cos 2 \varphi = \frac{1}{2} \sin 4 \varphi$$

$$\sin 3 \varphi \cos 2 \varphi = \frac{1}{2} (\sin 5 \varphi + \sin \varphi)$$

$$\sin 4 \varphi \cos 2 \varphi = \frac{1}{2} (\sin 6 \varphi + \sin 2 \varphi)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \varphi)$$

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} (3 \cos 3 \varphi + \cos 3 \varphi)$$

$$\cos 2 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} (\cos 3 \varphi + \cos \varphi)$$

$$\cos 3 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} (\cos 4 \varphi + \cos 2 \varphi)$$

$$\cos 4 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} (\cos 5 \varphi + \cos 3 \varphi)$$

$$\cos 3 \varphi \cos 2 \varphi = \frac{1}{2} (\cos 5 \varphi + \cos \varphi)$$

$$\cos 4 \varphi \cos 2 \varphi = \frac{1}{2} (\cos 6 \varphi + \cos 2 \varphi)$$

$$\cos 2 \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (\sin 3 \varphi - \sin \varphi)$$

$$\cos 3 \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (\sin 4 \varphi - \sin 2 \varphi)$$

$$\cos 4 \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} (\sin 5 \varphi - \sin 3 \varphi)$$

$$\cos 2 \varphi \sin 2 \varphi = \frac{1}{2} \sin 4 \varphi$$

$$\cos 3 \varphi \sin 2 \varphi = \frac{1}{2} (\sin 5 \varphi - \sin \varphi)$$

$$\cos 4 \varphi \sin 2 \varphi = \frac{1}{2} (\sin 6 \varphi - \sin 2 \varphi).$$

Berichtigung.

Die Gleichung 1b) Seite 16 muss lauten:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Bigg[\left(M_1 + \frac{M_2}{2} + M_3\left(1 - a + \frac{b}{2}\right)\right) r^2$$

$$+ \frac{r^2\lambda}{2}(M_2 + a\,M_3)\cos\varphi - \frac{r^2}{2}\Big(M_2 + (2\,a$$

$$- b)\,M_3\Big)\cos 2\,\varphi - \frac{r^2\lambda}{2}(M_2 + a\,M_3)\cos 3\,\varphi\Bigg]$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\Bigg[-\frac{r^2\lambda}{2}(M_2 + a\,M_3)\sin\varphi + r^2\,(M_2$$

$$+ (2\,a - b)\,M_3)\sin 2\,\varphi + \frac{3\,r^2\lambda}{2}(M_2$$

$$+ a\,M_3)\sin 3\,\varphi\Bigg] = Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1\text{b})$$

Tabelle zur

$$T = A_0 + A_1 \cos\varphi + \ldots$$
$$+ B_1 \sin\varphi + \ldots$$

Konstantenbestimmung durch Aus'

Punkte des abgewickelten Kurbelkreises		
No.	in Vielfachen von π	
0	0	$T_0 = A_0 + A_1 + A_2$ -
1	$\pi/12$	$T_1 = A_0 + 0{,}966\, A_1$ -
2	$\pi/6$	$T_2 = A_0 + \frac{A_1}{2} \sqrt{2} +$
3	$\pi/4$	$T_3 = A_0 + \frac{A_1}{2} \sqrt{2} -$
4	$\pi/3$	$T_4 = A_0 + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2}$ -
5	$5\,\pi/12$	$T_5 = A_0 + 0{,}259\, A_1$ -
6	$\pi/2$	$T_6 = A_0 - A_2 + A_4$ -